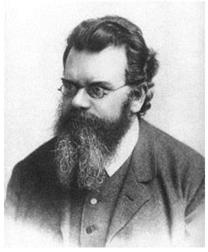
Quelle vitesse !!!



On admet ici qu'un gaz monoatomique est formé de molécules en perpétuelle agitation. Pour une molécule, on admet aussi que la probabilité d'avoir le module de sa vitesse compris entre v et $v + \mathrm{d}v$ est donné par : $\mathrm{d}p = \mathrm{A}\ e^{-\mathrm{B}\,v^2}\ 4\pi\, v^2\, \mathrm{d}v$ où A et B sont des constantes. Ceci correspond à la distribution dite de Maxwell-Boltzmann liée à l'étude de la cinétique des gaz.

Maxwell a développé une représentation statistique des molécules d'un gaz. De son côté, Boltzmann a étudié de nombreux aspects de la thermodynamique en utilisant les aspects statistiques. Notons pour finir cette introduction que Cédric Villani, médaille Fields en 2010, a été récompensé pour des travaux liés à la physique statistique (et à l'équation de Boltzmann en particulier…).

1) Recherche sur A.

Il y a fort à parier que le module de la vitesse d'une molécule choisie au hasard soit compris entre 0 et $+\infty$. Cette hypothèse étant admise, on peut alors écrire une condition de « normalisation » : $\int_0^{+\infty} \mathrm{A}\, e^{-\mathrm{B}\,v^2}\ 4\pi\, v^2\, \mathrm{d}v = 1$.

Calculez cette intégrale pour en déduire A en fonction de B.

Remarque : au cours de ce travail, vous pourriez bien rencontrer une intégrale du genre $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x$. Pour la calculer, justifiez que : $\mathrm{I}^2 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\, y^2}\, \mathrm{d}y$ puis montrez : $\mathrm{I}^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\,(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha\, r^2}\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$

Remarque bis : si vous ne trouvez pas $\mathrm{A} = \left(\dfrac{\mathrm{B}}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$, vous devriez me montrer votre travail…

2) Recherche sur B.

On admet ici que l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique est $\mathrm{U} = \dfrac{3}{2} N\, k\, T$ avec N le nombre d'atomes du gaz, k la constante de Boltzmann et T la température du gaz en Kelvin. Cette énergie provient de l'énergie cinétique des atomes du gaz. Or, cette dernière est $½\, m\, v^2$ pour une molécule seule. Pour l'ensemble du gaz, on peut donc dire (en utilisant une approche statistique) que cette énergie vaut $\mathrm{E_c} = ½\ N\ m\ \overline{v^2}$ avec m la masse d'une molécule et $\overline{v^2}$ est la moyenne de la vitesse au carré.

Calculez alors : $\overline{v^2} = \int_0^{+\infty} v^2\, \mathrm{d}p = \int_0^{+\infty} v^2 \left(\dfrac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\mathrm{B}\,v^2}\ 4\pi\, v^2\, \mathrm{d}v$

En déduire B en fonction de k, T et m en profitant de la relation : $\mathrm{U} = \mathrm{E_c}$.

Pour finir, calculez la vitesse moyenne $\overline{v}$ avec : $\overline{v} = \int_0^{+\infty} v\, \mathrm{d}p$ pour $T = 293$ K (soit 20°C) en prenant $k = 1{,}38\ 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}}$ et pour un gaz d'azote avec $m = 4{,}65\ 10^{-26}$ kg.