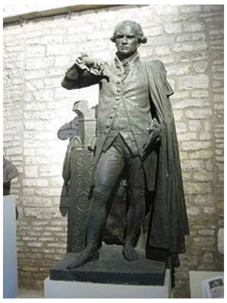
Une étude abstraite de recherche d'extremum…

Dans cette fiche, je vous propose d'explorer avec soin et rigueur des situations où la fonction dépend d'un paramètre réel noté a. On se doute que les résultats vont dépendre de ce paramètre, mais de quelle manière ? Tout est là… Vos résultats et commentaires dépendront donc de la valeur de a.



Pour les fonctions suivantes, votre objectif consiste à déterminer les points critiques de la fonction (s'il en existe…) puis d'étudier leur nature avec les fameux coefficients de Gaspard Monge, ou bien avec une autre tactique (expliquée en bas de cette page) lorsque M. Monge n'est pas joignable…

I $\quad f(x,y) = x^2 + a\,x + y^2 + y$ (cas cool pour s'échauffer un peu…)

II $\quad h(x,y) = ax^2 + x + \ xy + y^2 + y$ (cas un peu moins cool…)

III $\quad g(x,y) = x^2 + x + a\,xy + y^2 + y$ (cas *largement* moins cool……)

IV $\quad k(x,y) = ax^3 + x^2 + x + y^2 + y$ (cas très déli-k….)

<u>Tactique de repli lorsque M. Monge s'avoue vaincu…</u>

Présentation avec un exemple simpliste que M. Monge traite très bien (et que l'on peut même étudier sans M. Monge !), mais c'est juste pour un exemple… Merci de votre compréhension !

$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 1$ On obtient facilement le point critique $A(\mathbf{1}\,;\mathbf{0})$.

Pour étudier si ce point critique est un minimum, un maximum ou un point col, on peut « explorer » les alentours de ce point en travaillant avec un point M pouvant se déplacer autour de A.

On pose donc $M(\mathbf{1} + \alpha\,;\mathbf{0} + \ \beta)$ avec des réels α et β très petits (de l'ordre de $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{100}$ voire plus petit…) pour rester au plus près de A.

On doit ensuite calculer l'expression de $\Delta = f(M) - f(A)$ et étudier son signe.

- Si Δ reste ≥ 0 pour toutes valeurs de α et β, ceci donne : $f(M) - f(A) \geq 0$. Ainsi, on obtient : $f(M) \geq f(A)$ et A est un minimum.
- Si $\Delta \leq 0$ pour tous α et β : $f(M) - f(A) \leq 0$. Ainsi, A est un maximum.
- Si le signe de Δ n'est pas fixe, on a un point col.

Pour notre cas : $f(A) = 0$ puis : $\Delta = f(M) - f(A) = (1+\alpha)^2 - 2(1+\alpha) + \beta^2 + 1$. Au final, on trouve : $\Delta = \alpha^2 + \beta^2$. On a ici $\Delta \geq 0$. Et f admet un minimum local en $A(1\,;0)$.