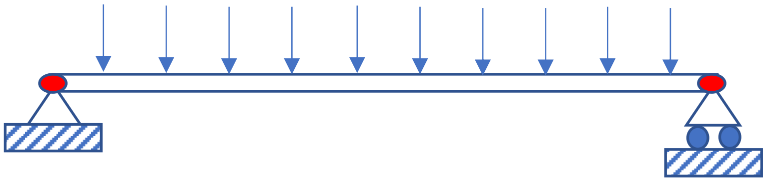
Une poutre de référence !!

En RDM, les choses peuvent paraître compliquées puisque de nombreux aspects s'entremêlent. Voici donc un exemple permettant de se rappeler des formules essentielles et de valider certains résultats fondamentaux. Bref, voici une fiche de rêve !!



Une poutre est en appui double à gauche (deux directions sont bloquées) et en appui simple à droite (une seule direction bloquée), elle supporte une charge linéique noté q.

Il est clair que la forme de la poutre sera du type :

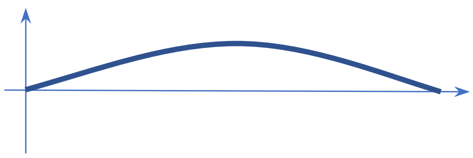
La fonction donnant la déformée $v(x)$ sera donc du type convexe (courbure similaire à la fonction x^2). Rappel : la déformée d'une poutre représente, en fonction de x, l'écart à la position de la ligne neutre de la poutre sans charge.

Une formule fondamentale (dont la démonstration est trop délicate) : $\boldsymbol{E\, I_{Gz}\, v''(x) = M(x)}$

Rappel : $M(x)$ est le moment transmis par la *partie droite* de la poutre sur la section située à l'abscisse x.

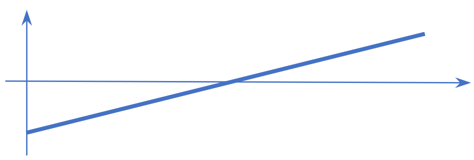
La forme de la fonction $v(x)$ indique une courbure convexe, donc $v''(x) \geq 0$ (point lié à votre cours de maths). Ceci permet de conclure : $M(x) \geq 0$.

On peut ensuite démontrer pour cet exercice que la courbe du moment est de la forme ci-contre (facile à retenir, car inversée par rapport à celle de $v(x)$).



Enfin, avec la formule reliant la dérivée du moment à l'effort tranchant $\boldsymbol{M'(x) = -V(x)}$ (formule démontrée par la suite) on peut retrouver la forme de $V(x)$.

$V(x)$ est d'abord négatif, puis positif selon le graphe :



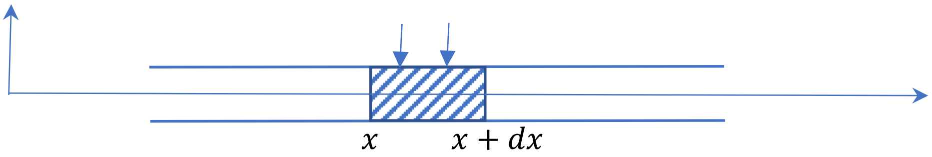
Rappel : $V(x)$ est l'effort tranchant transmis par la partie droite de la poutre sur la section située à l'abscisse x.

Remarque : la valeur négative de $V(0)$ est logique car la section située en $x = 0$ est en équilibre sous l'action de l'appui situé en $x = 0$ d'une part, et de l'effort tranchant $V(0)$ d'autre part.

Si vous retenez cet enchainement classique, vous pourrez plus facilement comprendre et vous souvenir des points essentiels à l'étude d'une poutre.

Quelques aspects techniques pour mieux comprendre…

Considérons ici une portion de la poutre précédente située entre les abscisses x et $x + dx$ comme sur le schéma :



Avant d'étudier l'équilibre de la portion hachurée, il faut expliquer un ou deux points…

- On définit usuellement *les efforts internes à la poutre* comme ceux exercés par la partie droite (notée Ω^+) sur une section de la poutre située à l'abscisse x. Ces efforts internes sont caractérisés par un effort tranchant $V(x)$ et un moment $M(x)$. Remarque : la notation Ω^+ pour parler de la partie droite de la poutre agissant sur la section d'abscisse x est classique. On peut comprendre le symbole + par « la partie située avec x plus grand ».
- Le principe d'action-réaction explique l'existence de la réaction d'un support dirigée vers le haut lorsqu'un objet est posé sur lui. L'objet exerce une force (liée à sa masse) sur le support qui réagit en conséquence. Les deux forces sont opposées, l'objet est bien en équilibre. De la même façon, lorsque l'on discute d'une section virtuelle située à l'abscisse x d'une poutre, l'effort tranchant exercé sur elle par Ω^+ est $V(x)$ et l'effort exercé sur elle par Ω^- est exactement l'opposé $-V(x)$. La section virtuelle respecte ainsi la fameuse relation $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$. Il en est de même pour les moments.
- La charge linéique représentée sur le schéma peut être définie comme la force $\overrightarrow{dF}$ exercée sur une longueur dx de poutre et dont l'expression est : $\overrightarrow{dF} = -q\ dx\ \vec{y}$ avec q un réel positif.
- On connaît la relation $\sum \vec{M}_{\vec{F}ext/A} = \vec{0}$ vérifiée par un solide en équilibre. Cette relation doit être complétée lorsque le solide peut être soumis à l'action de couples agissant localement en certains points du solide. On pose : $\sum \vec{M}_{\vec{F}ext/A} + \sum \vec{C}_{ext} = \vec{0}$. Il faut noter que le point A choisi pour le calcul des moments n'intervient pas dans la somme des couples. On utilise parfois le terme de *couple pur* (ou *moment pur*).

Ouf ! On peut enfin passer à l'étude de l'équilibre de la tranche hachurée !!

$\sum \boldsymbol{\vec{F}_{ext}} = \boldsymbol{\vec{0}}$ implique :

- sur l'axe des $\vec{x}$, les efforts normaux donnent : $-N(x) + N(x + dx) = 0$
- sur l'axe des $\vec{y}$, on prend en compte les efforts tranchants et la charge linéique ce qui donne : $-V(x) - q\ dx + V(x + dx) = 0$

Dans chacune des relations, on peut diviser par la longueur dx et ainsi obtenir les relations :

$$\frac{N(x+dx)-N(x)}{dx}=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{V(x+dx)-V(x)}{dx}=q$$

En faisant tendre dx vers 0, on obtient : $\quad N'(x)=0 \quad$ et $\quad V'(x)=q$

Rappel des matheux : pour une fonction dérivable, on a en effet : $\lim\limits_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}=f'(x)$

On obtient ensuite : $\;N(x)=a\;$ et $\;V(x)=q\,x+b\;$ avec les constantes a et b qui sont obtenues avec les conditions aux limites en $x=0$ par exemple (conditions obtenues grâce à l'étude de l'équilibre global de la poutre). Dans notre cas, on trouve $a=0$ (aucun effort sur l'axe des x) et $b=-\frac{q\ell}{2}$ avec ℓ la longueur de la poutre.

$\sum \overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{\vec{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{ext}/\boldsymbol{A}}+\sum \overrightarrow{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{ext}}=\vec{\boldsymbol{0}}$ implique de son côté une seule relation sur l'axe des z :

Pour calculer les moments des forces extérieures dont la liste est : $-\vec{N}(x)$, $\vec{N}(x+dx)$, $-\vec{V}(x), \vec{V}(x+dx)$ et enfin $-q\,dx\,\vec{y}$, j'ai choisi le point central de la section située à l'abscisse x.

On obtient, en utilisant la relation précédente en gras avec ses deux parties :

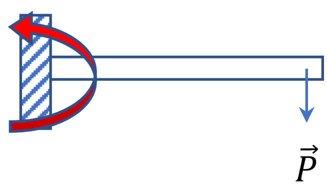
$$\left[0+0+0+dx\,V(x+dx)-\frac{dx}{2}(q\,dx)\right]+\;[-M(x)+M(x+dx)\,]=0$$

Au final, on obtient : $M(x+dx)-M(x)=-V(x+dx)\,dx+\frac{1}{2}q\,dx^2$.

En divisant par dx : $\;\frac{M(x+dx)-M(x)}{dx}=-V(x+dx)+\frac{1}{2}q\,dx$

Dans la partie droite de la relation, le terme $\frac{1}{2}q\,dx$ peut être négligé car dx est un infiniment petit. De plus, la valeur du terme $V(x+dx)$ est pour la même raison équivalente à $V(x)$.

On obtient ainsi : $\;\frac{M(x+dx)-M(x)}{dx}=-V(x)\;$ qui conduit à : $\;\boldsymbol{M'(x)=-V(x)}$



<u>Une dernière info de technique pour la route :</u>

Encastrement d'une poutre en un point A (à gauche) et chargée à son autre extrémité B (à droite) par une force $\vec{P}$.

L'encastrement transmet à la poutre en A un moment $\vec{\Gamma}_A$ qui est un couple pur : $\vec{\Gamma}_A=\Gamma_A\,\vec{z}$ avec une constante positive Γ_A. Lorsque l'on écrira la relation $\sum \vec{M}_{\vec{F}ext/A}+\sum \vec{C}_{ext}=\vec{0}$, on obtiendra alors : $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{R_A}+\overrightarrow{CB}\wedge\vec{P}+\vec{\Gamma}_A=\vec{0}$. Il restera à bien choisir le point C.