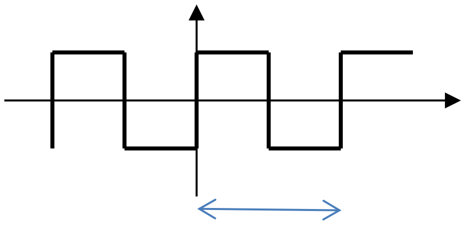
Un petit rappel ?

I Fonction périodique *f*



Période du signal : T

Fréquence du signal : $F = \dfrac{1}{T}$

Pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et si $T = 2\pi$, $\omega = 1$

Alors f peut être modélisée par : $f(t) = \dfrac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \; a_n \cos(n\omega\, t) + b_n \sin(n\omega\, t) \; \}$

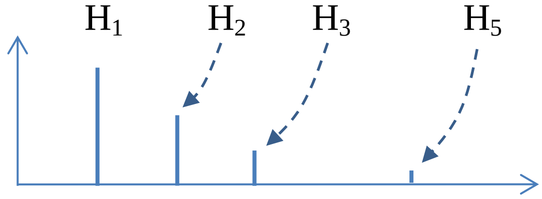
$$\frac{a_o}{2} = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, dt \;\; ; \;\; a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega\, t)\, dt \;\; ; \;\; b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega\, t)\, dt$$

On peut intégrer sur un intervalle du type [0 ; T] ou bien [–T/2 ; T/2] selon la formule donnée pour la fonction *f*.

Remarque : f paire $\to b_n = 0$; f impaire $\to a_n = 0$

Alors, on peut décrire f dans l'espace des fréquences en fonction des valeurs de n qui indiquent des fréquences multiples de la fréquence fondamentale F.

C'est le spectre de Fourier



n	0	1	2	3	4	5
f	0	F	2F	3F	4F	5F

Applications

∗ Test d'un amplificateur de tension. On donne un signal parfaitement sinusoïdal en entrée et on observe le signal en sortie.
Les défauts de l'amplificateur sont visibles dans les harmoniques et quantifiées par le taux de distorsion : $t_d = \dfrac{\sqrt{H_2^2 + H_3^2 + H_4^2 + \ldots}}{H_1}$

L'amplificateur sera de bonne qualité lorsque t_d sera faible : le signal de sortie est très proche d'une sinusoïde parfaite, les harmoniques sont petites par rapport au fondamental.

∗ Les signaux carrés ont une infinité d'harmoniques… Dans les circuits imprimés, alimentés par des signaux d'horloge « carrés », la présence de nombreuses fréquences élevées (les harmoniques) induit un champ électromagnétique non négligeable pouvant perturber le fonctionnement du reste des circuits.
Ainsi, certains circuits récents génèrent des signaux volontairement « adoucis » aux coins afin de créer moins d'harmoniques perturbatrices…

II Transformée de Fourier

On considère une fonction f quelconque (devant juste permettre les calculs qui suivent).

L'analyse des fréquences présentes dans f est donnée par : $F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$

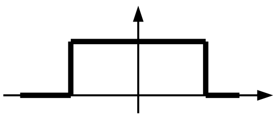
Pour f paire : $F(\omega) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\, \cos(\omega t)\, dt$

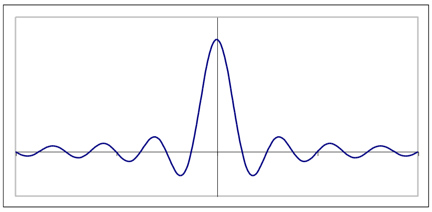
Pour f impaire : $F(\omega) = \dfrac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\, \sin(\omega t)\, dt$

Remarque :
il faut calculer $F(\omega)$ pour $\omega \neq 0$ puis $F(\omega)$ pour $\omega = 0$ à part.

L'exemple fondamental est la fonction porte dont le graphe et la transformée de Fourier sont :

Avec : $F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\sin(\omega a)}{\omega}$

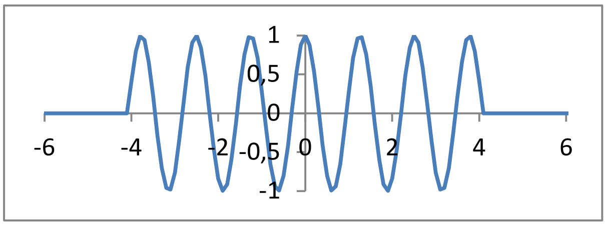


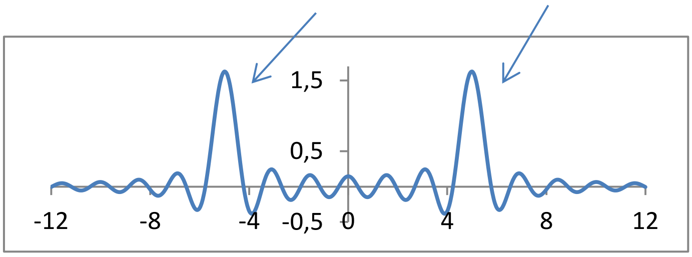


Remarque : l'allure d'un morceau de cosinus donne le même genre de transformée de Fourier mais décalée en fréquence !

Exemple : $f(t) = \cos(\omega_0\, t)$ sur $[-a\,;\,a]$. Le graphique est tracé avec a = 4 et $\omega_0 = 5$ rad/s.

Avec la transformée de Fourier qui donne : $F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \dfrac{\sin(4\,(\omega+5))}{\omega+5} + \dfrac{\sin(4\,(\omega-5))}{\omega-5} \right\}$





Applications

∗ Surveillance de la bande FM… France Inter ou RTL n'émettent que sur une partie du spectre des ondes hertziennes. Ils ne doivent pas empiéter l'un sur l'autre ou sur d'autres radios. On contrôle donc la largeur du pic principal (mesurée à –20 dB) dans le domaine des fréquences. C'est « l'encombrement spectral ».

∗ Test de compatibilité électromagnétique… Avant de mettre un appareil contenant des composants électriques et/ou électroniques, il faut vérifier si le champ EM généré par cet appareil ne dépasse pas les normes (le consommateur est un peu protégé parfois…). On mesure ses émissions, et le spectre montre les fréquences les plus gênantes…

∗ Courbe de réponse en bruit blanc… Pour tester la qualité d'une enceinte acoustique, on lui donne un signal composé de toutes les fréquences audibles par l'oreille humaine (de 20 à 20 kHz). Test « impulsionnel » avec $\tau \approx 20$ µs. On observe ensuite le spectre de sa réponse pour voir les fréquences mal amorties.

∗ Suivre l'évolution des suites d'un AVC avec l'étude de l'EEG.