

Une jolie démonstration...

On considère ici $\vec{F}$, un champ de vecteurs « conservatif ». Ceci signifie que **le travail** de $\vec{F}$ entre deux points quelconques A et B est indépendant du chemin suivi entre ces deux points. On dit aussi « **la circulation** de ce champ est indépendante du chemin ».

Le but de cette démonstration est de montrer : « Si le champ $\vec{F}$ est conservatif, alors ce champ dérive d'un potentiel U . C'est-à-dire : $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} U$ ».

Pour simplifier, on suppose ici être dans $\mathbb{R}^2$, donc, on note : $\vec{F} = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$.

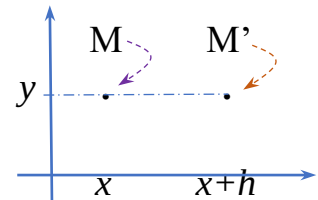
Pour la suite, on pose $f(M) = f(x, y) = \int_0^M \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$ = travail du champ $\vec{F}$ le long d'un chemin allant de l'origine O à un point quelconque M.

Nous allons montrer que cette fonction f est justement le potentiel U dont le champ dérive.

Posons M et M' deux points d'ordonnée y selon le schéma :

Notons : M(x ; y) et M'(x + h, y)

On a : $f(M') = f(x + h, y) = \int_0^{M'} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$



Ainsi, on peut calculer : $f(M') - f(M) = \int_0^{M'} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} - \int_0^M \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_M^{M'} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$

Ce travail, de M à M', étant indépendant du chemin (notre champ est conservatif !), on peut suivre le segment MM' pour le calculer. On utilise alors : $\overrightarrow{dl} = dx \vec{i}$ le long de ce segment.

D'où : $f(M') - f(M) = f(x + h, y) - f(x, y) = \int_M^{M'} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_M^{M'} P(x, y) dx$

Hypothèse raisonnable : le champ reste quasiment constant entre M et M' car on travaille avec h très petit relativement à x . M et M' sont en effet deux points très proches.

Ainsi : $\int_M^{M'} P(x, y) dx = P(x, y) \int_M^{M'} dx = P(x, y) h$.

D'où : $P(x, y) = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$. Or, la limite de ce rapport lorsque h tend vers 0 existe (puisque f est de classe C^1 , du fait de sa définition donnée au départ).

Ainsi : $P(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(M)$

Et il en est de même avec Q avec la relation : $Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(M)$

Au final, on obtient bien : $\vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = \overrightarrow{\text{grad}} f$

Le champ $\vec{F}$ dérive du potentiel f (à une constante près) défini plus haut.