Une jolie formule…

I $\quad \Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Calculez le laplacien de la fonction $\; f(x, y) = 2\,x\,e^{x^2+y^2}$

II Variables complexes

On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ et $\bar{z} = x - \mathrm{i}\,y$.

1) Déterminez les expressions de $z + \bar{z}$ et $z\bar{z}$.

2) En déduire l'expression de $f(x, y)$ (la fonction précédente) en fonction de z et $\bar{z}$.

Pour la suite, on notera $f(x, y) = \mathrm{F}(z, \bar{z})$.

3) Calculez $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}$ puis $\mathrm{G} = \dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \bar{z}\,\partial z}$

4) Donnez alors G en fonction de x et y en réutilisant les expressions de z et $\bar{z}$.

5) Pour conclure (temporairement) ce travail, pouvez-vous proposer une jolie formule reliant le laplacien à notre fonction complexe ?

« La Nuit étoilée » du célèbre peintre Vincent Van Gogh est-il un *joli* tableau ?
Ce terme est très relatif en art, même s'il semble bien adapté à cette peinture…
Cette toile date de 1889. Dans un tout autre domaine, les fonctions complexes ont été l'objet de nombreuses études au cours de ce même siècle…
En particulier, Bernhard Riemann (1826-1866) en était un expert redoutable. Il présente sa théorie des fonctions d'une variable complexe dans sa thèse de 1851.

III La démonstration

On veut exprimer $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en fonction de F et des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

1) Déterminez $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x}$.

2) En utilisant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x}$, donnez $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en fonction de $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \bar{z}}$.

3) Calculez ensuite $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

4) Déterminez $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial y}$ puis $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en utilisant $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial y}$.

5) Calculez ensuite $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

6) Donnez finalement Δf en fonction de F et de ses dérivées partielles.