Une fonction très étonnante découverte par Léonhard Euler : $f(x) = x^2 - x + 41$

I Complétez le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$											

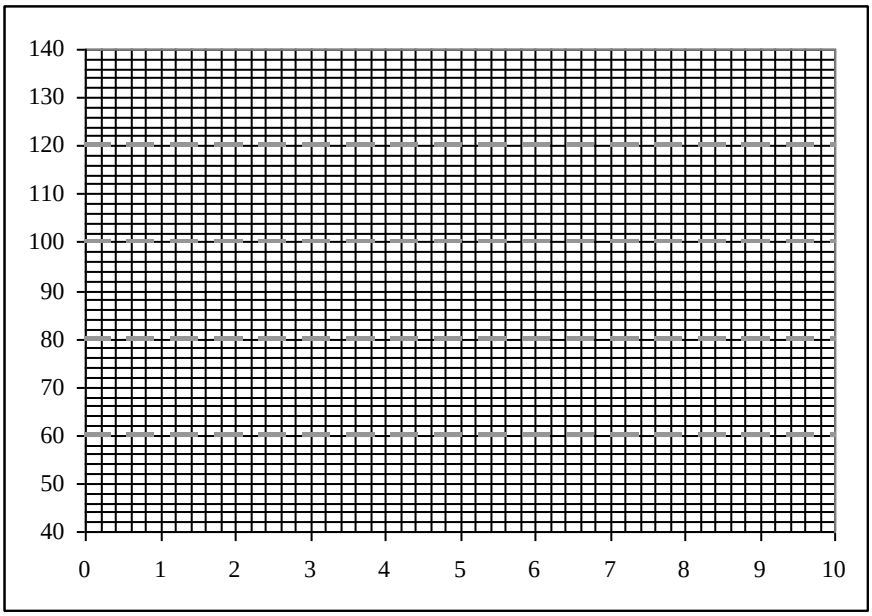
Voyez-vous en quoi ces valeurs sont particulières ?
Si « Oui » : Bravo ! Passez à la suite ! Si « Non » : Tant pis…Passons à la suite…

II Tracez la courbe représentative de f sur le graphique ci-contre.

Déterminez alors graphiquement la valeur de $f(6,5)$

Tracez la tangente à la courbe au point x = 6.

Déterminez son équation.



III Pour quelle valeur de x la courbe semble-t-elle admettre un minimum ? Vérifiez votre réponse en calculant la dérivée de f, en résolvant $f'(x) = 0$ puis en donnant le tableau de variations sur [0 ; 10].

IV Choisissez un nombre entier N *au hasard* entre 11 et 40. Calculez $f(N)$ puis $\sqrt{f(N)}$. Ensuite, calculez toutes les divisions de $f(N)$ par chacun des entiers inférieurs à $\sqrt{f(N)}$. C'est-à-dire : $f(N)$ divisé par 2 ; $f(N)$ divisé par 3 ; ……..

Que constatez-vous ? Que peut-on en conclure ? (Voir peut-être avec votre enseignant…)

V Calculez $f(41)$. Le résultat est-il un nombre premier ?

VI La fonction f donne-t-elle tous les nombres premiers compris entre $f(0)$ et $f(40)$?
Si « Oui » : prouvez-le. Si « Non » : Trouvez un exemple.

VII Soit E = 101. Par lecture graphique, déterminez son antécédent e par f tel que $f(e) = E$.

Déterminez par le calcul les deux antécédents de E = 101.

VIII Calculez l'image par f de $a = \frac{1+\sqrt{129}}{2}$ Que peut-on en dire ?