# *Une blague rigolote !!*

# *Mais, il vaut mieux être un peu expert en mathématiques…*

Pour profiter de cette bonne blague, je dois effectivement commencer par vous expliquer deux ou trois choses d'assez bon niveau. Mais cela vaut le coup !!

## **Dérivées partielles croisées de $f(x, y)$**

Pour une fonction de deux variables, on peut calculer des dérivées partielles, tout le monde sait cela. On va discuter ici des « dérivées partielles croisées », notées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ dit que *f* a été dérivée d'abord par rapport à *y* puis, par rapport à *x*. En revanche, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ dit que la première dérivée est effectuée par rapport à *x*, et la seconde par rapport à *y*.

Cela est parfois perturbant pour les étudiants car l'écriture $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pourrait laisser penser, si l'on regarde les signes de dérivation dans l'ordre de lecture, que $\partial x$ est fait en premier et que $\partial y$ est fait ensuite. On comprend mieux l'ordre des choses lorsque l'on note le détail du calcul $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ qui montre bien que l'on dérive d'abord par rapport à *y* pour ce cas.

Ce qui est déjà drôle, c'est qu'en fait, les deux dérivées sont toujours identiques !! Mouais, j'entends ici les râleurs qui disent : « Oups, il aurait fallu préciser qu'il existe des cas où cette affirmation est fausse ! Quel scandale cette fiche…».

O.K., je précise : l'égalité est vraie à condition que *f* soit de classe $C^2$.

On doit d'ailleurs ce théorème à Hermann Schwarz (1843-1921).

Traduction svp ? Voici : la fonction *f* est de classe $C^2$ lorsque ses dérivées partielles d'ordre deux sont continues.

Cette dernière condition est fondamentale pour obtenir l'égalité discutée plus haut, et ceci en chaque point (*x*, *y*).
Il existe des fonctions qui servent de contre-exemple pour bien montrer que parfois, l'égalité est fausse. On doit à Guiseppe Peano (1858-1932) le cas de $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$.
Au point (*x*, *y*) = (0, 0), on observe que les dérivées partielles croisées de *f* existent mais ne sont pas égales. La fameuse égalité n'est pas ici au rendez-vous car la condition de continuité en (0, 0) n'est pas vérifiée. Ceci, même si l'on a posé au départ $f(x, y) = 0$.

Remarque importante : Si vous calculez $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, vous verrez la même expression !!

L'expression formelle des dérivées est la même, mais elle ne permet pas de calculer sa valeur en un point « interdit » par une division par 0. Il faut alors calculer les valeurs notées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ (notre cas se situe en ce point) en revenant à la définition d'une dérivation, en étudiant la limite des taux d'accroissement. C'est assez technique en fait… Réservons l'étude des détails à des experts en Maths, il est possible de les trouver sur des sites de cours niveau Math spé. En plus, vous pourriez y trouver les détails de la preuve que $f$ n'est pas de classe $C^2$ au voisinage du point (0, 0).

Résumons cette partie assez technique au final :
Quand on calcule les dérivées partielles croisées d'une fonction $f(x,y)$, on trouve toujours *la même expression* ! Ceci, pour toutes les fonctions du monde entier (en revanche, dans la superbe galaxie NGC 1055, je ne puis garantir la chose… on ne sait jamais ce qui peut se passer là-bas !).

Donc, il est absolument inutile de calculer à chaque fois les dérivées partielles croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Une seule suffit !
C'est plus clair à présent ? Good…

### Forme différentielle

Vous avez déjà rencontré cette notion sans vraiment le savoir…

Pour clarifier le titre de cette sous-partie, une forme différentielle est une expression mathématique de la forme : $\omega = g(x,y)\, dx + h(x,y)\, dy$. (on reste ici en 2 dimensions…)

- Vous voulez un exemple ?
- Ah oui M'sieur, s'il vous plaît !! On aime bien quand vous racontez des histoires…
- Bon, bon, d'accord… mais juste parce que c'est **vous** ! On y va…

Soit la force $\vec{F} = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath}$. Le travail de cette force au cours d'un petit déplacement $\overrightarrow{dl}$ se calcule selon le produit scalaire : $\vec{F}\,.\overrightarrow{dl} = F_x\, dx + F_y\, dy$. Avec bien sûr l'expression usuelle : $\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath}$

Bref, on peut écrire le travail élémentaire de cette force selon : $\delta W = F_x\, dx + F_y\, dy$.

Mais dites donc, on ne dirait pas une sorte de forme différentielle ???

Et voilà, on y est. Il faut bien sûr imaginer que la force n'est pas constante et dépende de $x$ et $y$ pour que notre discussion présente de l'intérêt.

Pour calculer le travail de la force au cours d'un déplacement entre les points A et B, il reste à calculer l'intégrale suivante : $W = \int_A^B F_x\, dx + F_y\, dy$. Et bien là où cela devient intéressant, c'est quand la forme différentielle admet une primitive $U$ (on ne discute pas ici de cette affaire un peu technique… on fait comme si on savait que cela peut se faire…).

Dans un tel cas, on peut alors simplifier le calcul en ne prenant en compte que les états A et B de départ et d'arrivée selon : $W = \int_A^B F_x\,dx + F_y\,dy = [U]_A^B = U(B) - U(A)$.

En termes techniques, on dit que la force *dérive d'un potentiel scalaire U*. Dans un tel cas, l'écriture du travail élémentaire est de la forme :

$$\delta W = F_x\,dx + F_y\,dy = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy$$

Mais… avant de pouvoir faire cela, il faut vérifier si la forme différentielle est bien une forme différentielle *totale exacte* (traduction : qui admet une telle primitive !!).

- Et comment on fait pour vérifier cela M'sieur ?
- C'est simple en fait…

Il faut vérifier que le domaine de travail est bien *étoilé* (ce sera toujours vrai pour nous…) puis, il faut calculer : $\frac{\partial F_x}{\partial y}$ puis $\frac{\partial F_y}{\partial x}$.

Si l'égalité $\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$ est constatée, vous pouvez déclarer :

« La forme différentielle $\delta W = F_x\,dx + F_y\,dy$ admet une primitive ». Et la fin du calcul se poursuit…..

Pour résumer toute cette affaire :

Il existe des choses appelées *formes différentielles* de la forme $\omega = g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy$ qui admettent parfois des primitives, ce qui simplifie le calcul d'une intégrale...
Pour vérifier si $\omega$ admet une primitive, il faut vérifier $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$. En effet, si $U$ est une primitive, cela revient à calculer $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ puis $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ qui seront nécessairement identiques d'après la première partie !
Si vous avez tout suivi, je dis bravo !!

## **Blague finale :** (enfin, on va rire un peu…)

**Un enseignant en maths arrive en classe… et propose l'exercice suivant :**
**Soit $f(x,y) = xy^2$. Calculez $df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$.**
**La forme différentielle obtenue est-elle *totale exacte* ?**
**Vous pourrez tester ensuite : $g(x,y) = e^{x^2-y^2}$ puis $\varphi(x,y) = cos(x+3y)\,e^{x^2-y^2}$**

C'est là qu'il faut rire !!! Par construction, la réponse sera toujours « On remarque que la forme différentielle obtenue est bien totale exacte » !!!!!! Drôle non ?

Moi, ça me fait rire…. Remarque : pour le cas de *dg*, on peut pronostiquer *g* pour la primitive !