# *La multilinéarité…*

… est une propriété permettant le calcul de certains déterminants plutôt délicats.

Pour illustrer cet aspect, nous abordons un cas assez simple pour mieux comprendre la technique (on pourrait donc faire certains des calculs ci-dessous plus facilement… sauf quand cela devient trop lourd ! Et c'est là que cette technique trouve tout son intérêt).

Arthur Cayley (1821-1895) était un expert en calcul de déterminants. Au King's College, il rafle déjà tous les prix : littérature, histoire, mathématiques…

## I Quelques rappels pour bien commencer

a) Le déterminant $\begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1+x \end{vmatrix}$ peut être vu comme le déterminant des vecteurs colonnes $C_1 = \begin{pmatrix} 1+x \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+x \end{pmatrix}$ exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Donc : $\det(C_1, C_2)$.

b) Par linéarité d'un déterminant, on peut écrire pour tous vecteurs colonnes $u$, $v$ et $w$ de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{C}^3$ (au choix !) : $\det(u + v, w) = \det(u, w) + \det(v, w)$

$$\det(u, v + w) = \det(u, v) + \det(u, w)$$

Ainsi, pour des vecteurs $a$, $b$, $c$ et $d$, on peut même écrire :

$$\det(a + b, c + d) = \det(a, c + d) + \det(b, c + d) = \det(a, c) + \det(a, d) + \det(b, c) + \det(b, d)$$

c) Par linéarité d'un déterminant, pour tout coefficient $x$ : $\det(x\,u, v) = x \det(u, v)$

d) Dès que deux colonnes sont liées, le déterminant est nul.
Ainsi, par exemple dans $\mathbb{R}^n$, on a : $\det(u, u, v_1, \dots, v_{n-2}) = 0$

## II $\boldsymbol{\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1+x \end{vmatrix}}$ (on démarre cool…)

Astucieusement, en notant $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, remarquons qu'il est possible d'écrire : $\Delta_2 = \det(u + x\,e_1, u + x\,e_2)$

Ainsi : $\Delta_2 = \det(u, u + x\,e_2) + \det(x\,e_1, u + x\,e_2)$

$$= \det(u, u) + \det(u, x\,e_2) + \det(x\,e_1, u) + \det(x\,e_1, x\,e_2)$$

$$= x \det(u, e_2) + x \det(e_1, u) + x^2 \det(e_1, e_2)$$

Avec : $u = e_1 + e_2$, on a : $\det(u, e_2) = \det(e_1 + e_2, e_2) = \det(e_1, e_2) + \det(e_2, e_2) = 1$

De même, on trouve : $\det(e_1, u) = 1$

Au final : $\Delta_2 = 2\,x + x^2$ $\quad\boldsymbol{\Delta_2 = x\,(2 + x)}$

**III** $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{1}+\boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1}+\boldsymbol{x} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}+\boldsymbol{x} \end{vmatrix}$ ( est le déterminant de la matrice $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x\, I_3$ )

On travaille de la même façon, mais cette fois avec des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{C}^3$ si on veut…)

$\Delta_3 = \det(u + x\, e_1, u + x\, e_2, u + x\, e_3)$ (que l'on développe par multilinéarité)

On peut éliminer d'office tous les termes où $u$ serait présent à deux positions distinctes. Par exemple, c'est le cas pour $\det(u, x\, e_2, u)$. Ainsi, il reste :

$$\Delta_3 = \det(u, x\, e_2, x\, e_3) + \det(x\, e_1, u, x\, e_3) + \det(x\, e_1, x\, e_2, u) + \det(x\, e_1, x\, e_2, x\, e_3)$$

Ensuite, en posant $u = \sum_{i=1}^{3} e_i$, on peut simplifier chaque terme où $u$ est présent. Il reste par exemple après développement par linéarité : $\det(u, x\, e_2, x\, e_3) = \det(e_1, x\, e_2, x\, e_3) = x^2$. On obtient ce même résultat pour les autres termes du même genre.

Finalement : $\boldsymbol{\Delta_3 = x^2\,(3 + x)}$

Ceci est juste un point d'exclamation et non une factorielle !

**IV Un gros morceau** $\mathbf{M}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{x}\ \mathbf{I}_n$

C'est le même genre de matrice que précédemment, mais de taille $n$ !

On pose encore $u = \sum_{i=1}^{n} e_i$. On note ensuite $\Delta_n = \det(u + x\, e_1, u + x\, e_2, \dots, u + x\, e_n)$

Par multilinéarité, après le développement, il ne doit rester qu'un vecteur dans chaque position (entre les virgules). Les seuls termes non nuls qui restent comportent :

- Soit $u$ en position $i$ et les vecteurs $x\, e_j$ aux autres positions (ce qui concerne $n$ termes)
- Soit tous les $x\, e_i$ (ce qui concerne un seul terme)

On obtient alors :

$$\Delta_n = \det(x\, e_1, x\, e_2, \dots, x\, e_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(x\, e_1, \dots, x\, e_{i-1}, u, x\, e_{i+1}, \dots, x\, e_{n-1}, x\, e_n)$$

(avec le vecteur $u$ en position numéro $i$)

De plus : $\det(x\, e_1, \dots, x\, e_{i-1}, \sum_{i=1}^{n} e_i, x\, e_{i+1}, \dots, x\, e_{n-1}, x\, e_n)$

$$= \det(x\, e_1, \dots, x\, e_{i-1}, e_i, x\, e_{i+1}, \dots, x\, e_{n-1}, x\, e_n) = x^{n-1}$$

Enfin, on trouve : $\boldsymbol{\Delta_n = x^{n-1}\,(n + x)}$

ceci est une factorielle !

**V Exercice d'application**

Montrez : $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2\,(1+x) & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-1 & \dots & (n-1)\,(1+x) & n-1 \\ n & n & \dots & n & n\,(1+x) \end{vmatrix} = n\,!\; x^{n-1}\,(n + x)$