Un petit TOPO sur les Développements limités ?

« Monsieur, j'ai rien trouvé sur les « développements limités » dans l'ensemble des sites web de notre chère Planète… Je veux dire, aucun cours vraiment écrit pour nous, les jeunes, pour que l'on ait une petite chance de comprendre… pas du genre avec tout plein de symboles illisibles !!! Vous pourriez faire une sorte de mini-cours dont vous avez le secret ? Une sorte de traduction compréhensible de ce « machin »… Allez, s'il vous plait Monsieur, soyez sympa *pour une fois*…».

Comme cela m'a été demandé si gentiment, difficile de dire non ! Bon, c'est parti !

Il faudra quand même que je vois ce que sous-entendait le « *pour une fois*… ».

I C'est quoi un D.L. ?

On travaille ici avec des fonctions qui aiment bien la dérivation. On peut donc facilement, en maîtrisant la table des dérivées usuelles, calculer les expressions de $f'(x)$, $f''(x)$, ….

Pour une fonction *f* donnée, acceptant d'être dérivée sans souci, on peut alors écrire son développement limité en un point *a* fixé :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Traduction : on peut remplacer une fonction *f* au voisinage de $x = a$ par un polynôme, plus facile à utiliser dans certains calculs (voir le II).

Cette formule a été popularisée par Taylor et Young, deux mathématiciens d'un pays qui a eu la mauvaise idée de rencontrer un certain Hugo Lloris sur son chemin… On verra après ce que cache les « … » à la fin de la formule…

<u>Tout de suite un petit exemple :</u>

On considère $f(x) = \cos(x)$ que l'on veut exprimer sous la forme d'un D.L. en $a = \pi$.

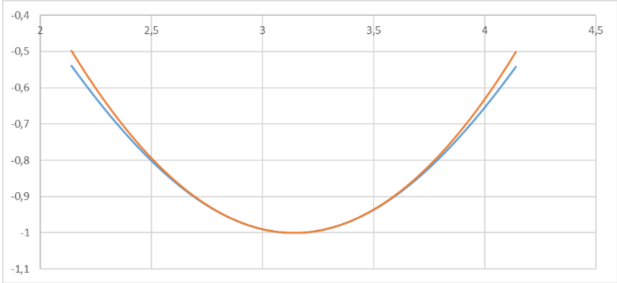
En utilisant : $cos' = -sin$, $sin' = cos$, on peut obtenir :

$$f(x) = \cos(x) = \cos(\pi) + \frac{-\sin(\pi)}{1!}(x-\pi) + \frac{-\cos(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \cdots$$

On obtient ainsi : $f(x) = \cos(x) = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 + \cdots$

Si on développe, cela donne : $\cos(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - \pi\, x + \frac{1}{2}\pi^2 + \cdots$ Attention ! Cette formule est valable lorsque *x* est au voisinage de π, donc pas très correcte pour $x = 15$!

Pour vous persuader que cette transformation fonctionne à merveille, voici un graphique comparant les deux fonctions : $\cos(x)$ en bleue et $-1+\frac{1}{2}x^2-\pi\,x+\frac{1}{2}\pi^2$ en orange.



Voyez comme elles sont collées ! Surtout juste autour de $a = 3{,}14159\ldots$

On a réussi à remplacer « localement » la fonction cosinus par un simple arc de parabole. Nous verrons ensuite l'intérêt de cette transformation.

Remarque importante :

Comme le fait de travailler en a non nul donne une formule un peu lourde. On utilise la plupart du temps $a = 0$. Cette astuce permet de simplifier notre relation en :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

Plus simple non ?

Voici la formule exacte du développement limité à l'ordre *n* en zéro d'une fonction *f* :

La formulation « théorique » correcte est : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + x^n\,\varepsilon(x)$

On dit « à l'ordre *n* » car la plus grande puissance sur *x* vaut justement *n*.

Que représente le terme $\varepsilon(x)$? C'est une fonction un peu compliquée qui est néanmoins très cool ! En effet, elle rend négligeable le terme final devant le dernier terme $\frac{f^{(n)}}{n!}x^n$.

<u>Exemple pratique :</u>

Déterminez le développement limité à l'ordre quatre de la fonction cosinus en 0.

Avec $f(x) = \cos(x)$, on obtient alors : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)$

En pratique, si l'on a besoin d'une écriture différente de $\cos(x)$ proche de $x = 0$, on pourra utiliser $\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$ en gardant à l'esprit que les pointillés représentent un terme beaucoup plus petit que $\frac{1}{24}x^4$. On pourra donc le négliger !

Bon, on sait comment calculer un D.L. à présent, mais…

II A quoi ça sert un D.L. ?

Pourquoi doit-on parfois utiliser un « développement limité » ?

Situation n°1 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{\cos(3x) - 1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Question : f admet-elle une limite en 0 ?

Analysons : en haut, on a $\lim\limits_{x \to 0} (\cos(3x) - 1) = 0$. Et en bas, on a aussi $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$. On est face à une situation de type indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$. Impossible de conclure simplement.

Mais, si on remplaçait le haut en utilisant un D.L. ? Bonne idée !

Je sens ici qu'un D.L. à l'ordre 2 suffira.

On utilise donc : $\cos(X) = 1 - \frac{1}{2}X^2 + \cdots$ avec $X = 3x$ (attention à ce changement de variable…). Donc : $\cos(3x) = 1 - \frac{1}{2}(3x)^2 + \cdots$ D.L. en 0, puisque la limite cherchée doit être calculée en 0.

On peut donc transformer notre fonction près de $x = 0$: $f(x) = \frac{\cos(3x)-1}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2}(3x)^2+\cdots}{x^2}$

Ainsi, on obtient : $f(x) = \frac{x^2\left(-\frac{9}{2} + \ldots\right)}{x^2}$ avec « … » qui est négligeable par rapport au fameux terme précédent (ici le $-\frac{9}{2}$).

Sous cette forme, il est clair que *f* admet une limite lorsque *x* tend vers 0. En effet, on peut simplifier par x^2 pour obtenir : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\frac{9}{2}$.

Exercices classiques :

a) Déterminer le D.L. de $f(x) = \ln(1 + x)$ à l'ordre 3 en $x = 0$.
b) Calculez $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\cos(x) - 1 + \sin(2x)}$.

Situation n°2 :

On veut résoudre une équation différentielle qui n'admet pas de solution explicite (donnant la solution sous la forme d'une fonction exprimée avec des fonctions usuelles).

Comment faire ?

Un certain Euler propose d'utiliser la formule : $y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$.

D'où vient cette formule qui permettra de résoudre numériquement l'équation ? Comment la comprendre ? Que représente la notation *h* ?

Oh, Oh, Pas de panique !! On va répondre à toutes ces questions tranquillement….

Il faut juste faire preuve d'un peu de patience.

Soit f, une fonction dont on veut écrire le développement limité à l'ordre 2 en un point x_i quelconque. On pose alors : $f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2} f'(x_i)\,(x - x_i)^2 + \cdots$

Notons x_{i+1} un point très proche de x_i, avec : $x_{i+1} = x_i + h$ et h un réel très petit. Alors, la relation précédente peut permettre de calculer $f(x_{i+1})$ selon :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2} f''(x_i)\,(x_{i+1} - x_i)^2 + \cdots$$

Et en utilisant $h = x_{i+1} - x_i$ cela donne :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\,h + \frac{1}{2} f''(x_i)\,h^2 + \cdots \qquad \text{(joli non ?)}$$

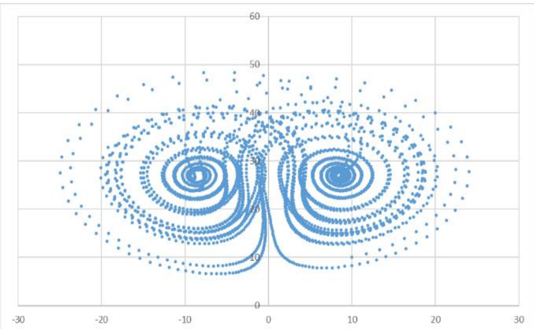
De cette équation, on peut obtenir : $f'(x_i)\,h = f(x_{i+1}) - f(x_i) - \frac{1}{2} f''(x_i)\,h^2 + \cdots$

Au final, cela donne : $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{1}{2} f''(x_i)\,h + \cdots$

On peut alors « tricher » un peu en disant que la dérivée de la fonction *f* peut être approchée selon la relation : $\boldsymbol{f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}}$

Moralité ce cette situation :

Devant un système d'équations différentielles impossible à résoudre de manière théorique, on peut transformer les équations avec l'astuce ci-dessus pour calculer pas à pas la solution du système. Je viens de le faire avec le fameux système de Lorenz $\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = \rho x - y - xz \\ z' = xy - \beta z \end{cases}$ qui marqua l'histoire de la théorie du Chaos.



Ce graphique correspond au cas classique : $\sigma = 10$; $\beta = \frac{8}{3}$; $\rho = 28$. J'ai utilisé les conditions initiales (10 ; 10 ; 10) et un pas de discrétisation $h = 0{,}01$ pour obtenir les évolutions des trois variables. Les variables y et z sont enfin représentées pour obtenir le fameux attracteur « papillon »…

J'espère que vous êtes à présent « fan » des D.L. ! On peut aussi les utiliser dans le cadre des fonctions de plusieurs variables, ce qu'a magistralement fait un certain Gaspard Monge !