Il ne sera pas dit qu'en mathématiques,
Jamais, vous n'aurez vu de fonction harmonique !

En préambule, on doit savoir qu'une fonction $f(x,y)$ est dite *harmonique* sur un ouvert D lorsque son laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est nul sur D. On rappelle aussi qu'une fonction harmonique sur un domaine ouvert D admet ses extremums sur la frontière de D.

I $f(x,y) = a\,x^3 + b\,y^3 + c\,x^2y + d\,xy^2 + e\,x^2 + g\,y^2 + h\,xy + i\,x + j\,y + k$

Déterminez toutes les fonctions harmoniques de cette forme avec les réels $a, \dots, k$.

II $z = x + i\,y$ (Ah, les célèbres nombres complexes !)

Calculez la forme algébrique de z^2 et de z^3. Proposez une petite conclusion…

III A la lumière du travail précédent, proposez des fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ de type polynômiales de la forme $f(x,y) = x^4 + \cdots$ et $g(x,y) = x^3y + \cdots$ qui pourraient bien être harmoniques.

Vérifiez tout de même que f et g sont bien harmoniques !

IV $f(x,y) = x^5 - 10\,x^3y^2 + 5\,xy^4$

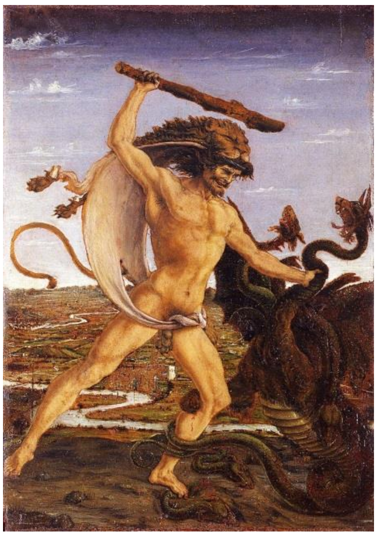
Cherchez les extremums de f sur les domaines suivants :

a) $D = [-1\,;\,1]^2$ (pour faciliter votre travail, remarquez les parités de f)

b) $D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\,\}$ (vous poserez un polynôme $\Psi(x)$ de degré 5)

Bonus 1 : Démontrez que le travail herculéen fait en b) peut être mené de manière scandaleusement plus rapide en changeant de point de vue…

Bonus 2 : Déterminez les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ et étudiez leur nature.



Antonio Pollaiuolo (1429-1498) était un artiste italien dont l'une des œuvres représente ici le fameux Hercule. Ce demi-Dieu de la mythologie grecque avait effectué douze travaux remarquables. L'un deux consistait à tuer l'hydre de Lerne (une terrible bête avec pas mal de têtes…).