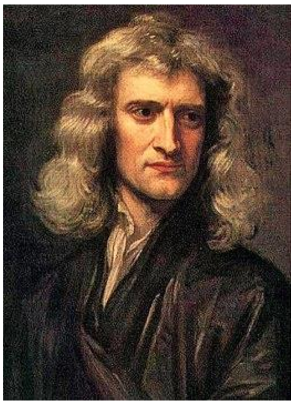
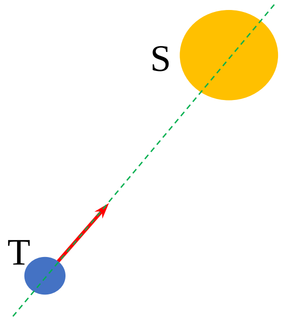


Un peu de gravitation…

Et pas mal de mathématiques !!

L'ambition du jour : nous glisser dans la peau d'un astronome-mathématicien !! Nous allons ainsi explorer quelques considérations liées au mouvement de la Terre autour du Soleil en nous basant sur certaines données bien établies que je vais rappeler tranquillement…

Isaac Newton (1642-1727) a montré que le Soleil exerce sur la Terre une force selon le schéma ci-contre :



La flèche rouge représente la force d'attraction $\vec{F}$ du Soleil sur la Terre, elle est alignée sur une ligne imaginaire passant par le centre des deux astres. Pour la suite, on note $\vec{u}$ un vecteur unitaire (sa taille est égale à 1) dirigé de T vers S.

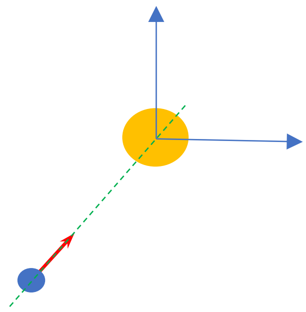
Si le Soleil et la Terre ont pour masses respectives m_S et m_T, si l'on note r la distance entre ces deux astres, alors, Newton propose de noter cette force selon : $\vec{F} = \mathcal{G} \dfrac{m_S\, m_T}{r^2}\, \vec{u}$

La lettre $\mathcal{G}$ représente la constante universelle de gravitation : $\mathcal{G} = 6{,}67\ 10^{-11}$ S.I.
L'idée de Newton était de formuler cette force de manière proportionnelle au produit des masses des deux corps impliqués, et le tout divisé par leur distance au carré (rappel : r vaut environ 150 millions de km (à quelques mètres près…)). Ainsi, $\mathcal{G}$ est « tout simplement » une constante de proportionnalité… Henry Cavendish publie en 1798 un mémoire où il explique comment il a pu mesurer cette constante grâce à sa fameuse balance de torsion.

Comme vous le savez peut-être, le Soleil est un astre *légèrement* plus gros que la Terre… et reste donc pratiquement immobile par rapport à elle. On suppose donc notre étoile placée en un point O, centre de notre repère de travail.

Donc travaillons !
Ce même Newton formule un principe fondamental permettant de décrire l'évolution d'un système physique soumis à certaines actions extérieures : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\, \vec{a}$
Traduction française de la relation de Newton : « La somme des forces extérieures agissant sur un système physique est égale à sa masse multipliée par son accélération. ».

Pour étudier un peu le mouvement de la Terre autour du Soleil, on va donc traduire cette relation proprement… en travaillant dans un repère lié au Soleil, avec des axes fixes, la Terre tournant autour de cette immense boule de gaz à très haute température.
Au final, on en tirera peut-être une information intéressante, qui sait ?



Posons notre repère fixe $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec O le centre du Soleil, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ les vecteurs bleus des axes de référence.
Dans cette situation, la position M du centre de la Terre peut être repérée par le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$.
N'oublions pas ici que les coordonnées x et y dépendent du temps t.

Justifiez alors avec soin : $\vec{u} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath})$

Montrez ensuite avec soin que l'étude du mouvement de la Terre autour du Soleil conduit au système : $\begin{cases} \ddot{x} + g\, m_s \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \\ \ddot{y} + g\, m_s \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \end{cases}$ (info : $\dot{x}$ est la dérivée de x par rapport au temps…)

Points n'ayant eux, rien à voir avec des dérivées temporelles…

Idée : on pourrait sommer ces relations !

Faites-le pour obtenir une équation portant sur la fonction $s = x + y$.
Pour la résoudre, je vous propose une astuce de physicien : on va supposer que la Terre tourne autour du Soleil selon une trajectoire circulaire (d'ailleurs, Copernic est d'accord…).
Justifiez alors que la fonction s répond à une équation de la forme $\ddot{s} + \alpha\, s = 0$ et donnez l'expression du coefficient α.

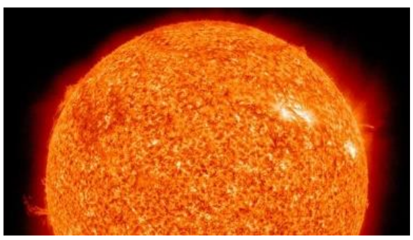
Petit aparté

Si la Terre tourne autour de Louis XIV (ah, ah !) selon un cercle de rayon r, alors on peut poser : $x(t) = r\,cos(\omega t)$ et $y(t) = r\,sin(\omega t)$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T étant la période de révolution du mouvement.
Vérifiez qu'alors : $s(t) = \sqrt{2}\,r\,cos(\omega t - \varphi)$ en précisant la valeur de φ.
Rappel utile pour cette étape : $cos(a) + sin(a)$ peut s'écrire autrement en utilisant la célèbre formule de trigonométrie $cos(a)\,cos(b) + sin(a)\,sin(b) = cos(a - b)$ avec $b = \ldots$

Conclusion de ce petit aparté : Il semble que la somme de deux fonctions de période T est encore une fonction de période T (justifiez-le avec soin !).

Vous pouvez finalement en déduire le coefficient m_S présent dans l'expression du coefficient α discuté précédemment (à condition de connaître la valeur de T…..)
Nota bene : pour cette étape, il faudra convertir T en secondes et r en mètres pour travailler avec les unités « légales ».

Informations de culture générale



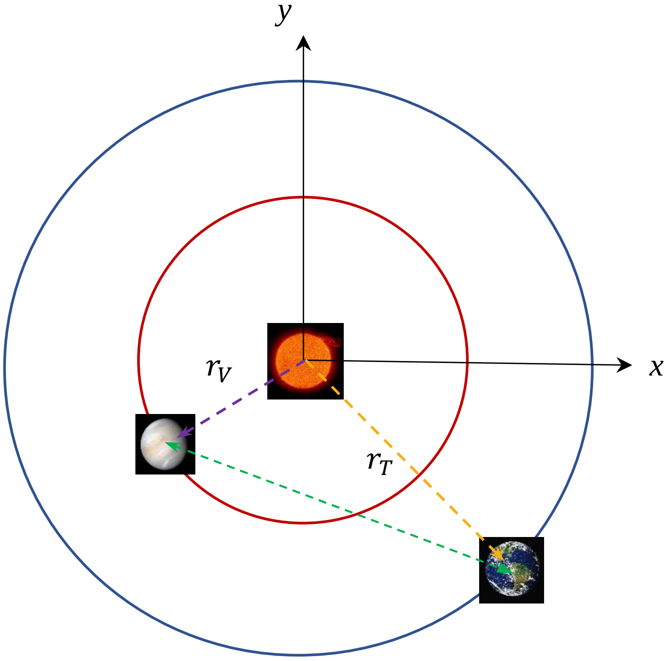
Le Soleil est une étoile de taille tout à fait moyenne (par rapport à d'autres étoiles). Sa masse est d'après certaines données officielles égale à $1{,}989\ 10^{30}$ kg. De plus, si sa température de surface est de l'ordre de 5 800 K, son cœur aurait une température d'une quinzaine de million de Kelvin !!!
D'où l'intérêt de naviguer à quelques 150 millions de kilomètres de cet astre brûlant !

Pour finir cette balade dans l'espace de notre système Solaire, je vous propose un petit bonus très ludique….

Problème de gravitation : la Terre et Vénus autour du Soleil…

Vous l'aurez remarqué, ce problème pourrait être qualifié de « problème des trois corps » ! Un certain Henri Poincaré (notre Einstein national) travailla dessus pendant quelques temps vers 1890… mais ses maigres compétences en mathématiques ne lui avaient pas permis à l'époque de résoudre ce petit problème de physique élémentaire… Heureusement, nous allons surement améliorer cette situation d'échec…
Suivez le guide !! (« Allons-y, je me sens très en forme !! », tout ça devrait très bien se passer…)

Posons tout de suite le repère de travail en mettant le Soleil au centre. Pour simplifier, nous considérons ici que les trajectoires de ces deux planètes se fait dans un même plan. Donc, on étudie un problème à deux dimensions. De plus, on suppose très raisonnablement que les trajectoires sont des cercles.
(sorry pour le schéma imparfait qui va suivre…)



On a donc le schéma ci-contre :
(*nota bene* : je crois que le schéma n'est pas tout à fait à l'échelle…)

Pour la suite, on utilisera les notations suivantes :

m_S = masse du Soleil
m_V = masse de Vénus
m_T = masse de la Terre

Distance Soleil-Vénus = r_V
Distance Soleil-Terre = r_T

Coordonnées de Vénus $(x_V\ ;\ y_V)$ Coordonnées de la Terre $(x_T\ ;\ y_T)$

Et voilà, tout est bien posé, il ne vous reste plus qu'à poser les équations liées à ce système et à résoudre tout ça……

Bonnes vacances !!!

Dernière petite info : vers 1890, seuls cinq ou six scientifiques étaient capables de comprendre les travaux de Poincaré dont les capacités embrassaient tous les domaines de la science…..