Extremums d'une fonction f(x,y)

I Introduction

Diverses situations conduisent à chercher le ou les paramètres permettant d'optimiser un résultat :

- gérer au mieux une file d'attente
- minimiser la quantité de matière à utiliser pour fabriquer une pièce
- maximiser les bénéfices pour une situation financière donnée
- Entourer la plus grande surface possible avec une corde de longueur donnée (voir le problème de Didon, ici face à Enée qui lui raconte la chute de Troie. Didon, selon la légende, fut à l'origine de la fondation de Carthage…)

Objectif : aborder **les bases** des méthodes utilisées pour ces problèmes d'**optimisation**.

Si un seul paramètre x est présent, on pose le problème sous la forme de la recherche des extremums d'une fonction $f(x)$. Il suffit de résoudre $f'(x) = 0$ pour déterminer les valeurs de x où f est susceptible d'admettre un extremum (maximum ou minimum). Ensuite, on cherche parmi ces valeurs celle qui rend $f(x)$ la plus grande ou la plus petite possible.

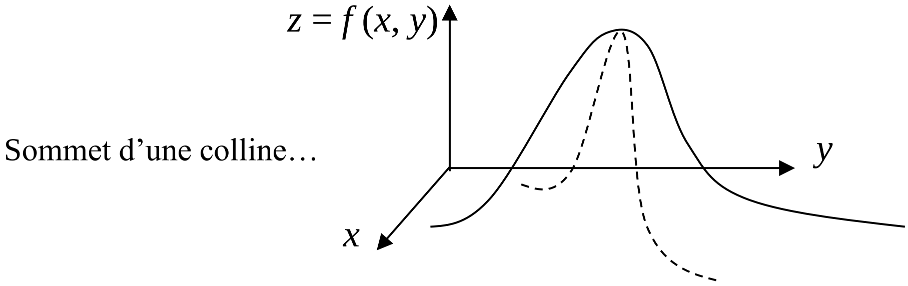
Remarque : en un point où $f'(x) = 0$, on observe un maximum (ou un minimum) si f'' reste négative (ou positive) dans les environs de ce point. Exemples : $f(x) = x^2$; $g(x) = 1 - x^2$.

Nous étudions ici le cas plus délicat des fonctions de deux variables $f(x, y)$.

II Définitions

On considère une fonction $f(x, y)$ définie sur une partie de R^2 notée U. Pour ces définitions, on note X = (x ; y) un point de U.

f admet un <u>maximum local</u> en A (x_A ; y_A) $\Leftrightarrow$ pour les X « proches » de A : $f(X) \leq f(A)$



Remarque sur « proche » :
En théorie, on définit une boule ouverte de rayon r centrée en A. « proche de A » est alors traduit par : la distance de X à A est inférieure à r (fixé à l'avance).
On écrit : $\exists\, r > 0$ tel que $\forall$ X vérifiant d(X, A) < r , on a $f(X) \leq f(A)$

f admet un <u>minimum local</u> en A $\Leftrightarrow$ aux points X proches de A : $f(X) \geq f(A)$

On dit que le maximum (ou le minimum) local est <u>strict</u> lorsque l'inégalité est stricte :
$f(X) < f(A)$ pour un maximum (ou $f(X) > f(A)$ pour un minimum)

III Etude à l'ordre 1

Comment trouve-t-on les points où f est susceptible d'admettre un extremum local ?

D'après l'étude du cas de $f(x)$, on sent bien que la fonction ne doit pas varier beaucoup localement en un tel point. Ceci doit être vrai lorsque l'on fait varier x mais aussi y.

D'où le <u>théorème</u> :

Soit une fonction réelle f définie sur U

Si :
- U est un ouvert de R^2
- f admet en A un extremum local
- les dérivées partielles premières de f existent en A

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A}) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{A}) = 0$

Traduction :
Si une fonction f admet en un point A un extremum local, alors il est certain que ses dérivées partielles premières sont nulles en ce point. Un tel point est un « point critique ».

En revanche, cela ne marche pas dans l'autre sens : si en un point A, on observe des dérivées partielles premières nulles, il n'y a pas forcément d'extremum local !

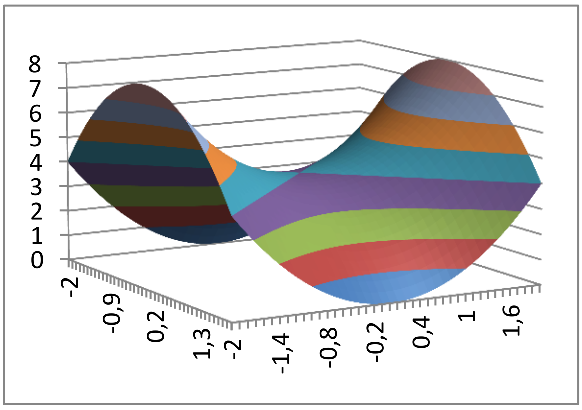
Exemple : $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4$. Calculons $f(0, 0) =$

Déterminons les dérivées partielles premières de f en (0 ; 0).

Donnons l'expression de $f(x, 0)$ puis de $f(0, y)$.

Montrons alors qu'il n'y a pas d'extremum local au point (0 ; 0).

On dit qu'un tel point est un point col, ou bien un point selle.



Exercices : Déterminez les points critiques pour les fonctions suivantes.

$f(x, y) = x^2 + 4x + y^2 - 6y + 20$ $\qquad$ $g(x, y) = x^3 + 2x^2 + x + y^4 - 2y^2 + 10$