Questions diverses sur les champs de vecteurs

Cette fiche est réservée à une certaine élite ayant des connaissances mathématiques liées aux fonctions de plusieurs variables, aux champs de vecteurs, à la notion gradient, à la vie très documentée d'un certain Monsieur Schwarz.... Bref, on entre tout de suite dans le vif du sujet !!!

I Le champ $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ 2x \end{pmatrix}$ peut-il dériver d'un potentiel ?

Remarque : ce champ très cool est défini sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, c'est donc ici un cas très simple.

1) Première méthode pour répondre à la question posée

Si la réponse était positive, alors, il existerait un potentiel $U(x,y)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ tel que l'on puisse écrire : $\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}$. On aurait alors les relations : $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = y \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 2x \end{cases}$

Or, ceci montre que la fonction $U(x,y)$ n'est pas seulement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, elle est en fait de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. En effet, ses dérivées partielles d'ordre un sont égales à des fonctions qui sont déjà de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (on est même en classe C^∞, le grand luxe !!!).

Moralité : on peut calculer les dérivées partielles d'ordre deux de $U(x,y)$. On y va !

La première ligne $\frac{\partial U}{\partial x} = y$, dérivée par rapport à *y*, donne alors : $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 1$

La deuxième ligne $\frac{\partial U}{\partial y} = 2x$, dérivée par rapport à *x*, donne alors : $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 2$

Au final, si le potentiel $U(x,y)$ existait, il aurait la curieuse propriété de contrarier le théorème de Schwarz (qui n'aime pas être contrarié !!). En effet, on aurait ici une fonction *U* de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ qui admet des dérivées partielles croisées différentes en tout point !

Conclusion : l'hypothèse que notre champ dérive d'un potentiel est donc absurde.

2) Autre méthode pour répondre à la question posée

La première ligne $\frac{\partial U}{\partial x} = y$ peut être intégrée par rapport à *x* : $U(x,y) = \int y\, dx + g(y)$

Remarque : la constante de primitivation, indépendante de *x*, peut en revanche dépendre de *y*.

Soit : $U(x,y) = xy + g(y)$

(il est facile de vérifier que cette expression convient quelle que soit la fonction $g(y)$ choisie. Notons au passage que g est dérivable car $\frac{\partial U}{\partial y}$ existe bien d'après notre hypothèse…)

On peut alors calculer directement la dérivée partielle de U par rapport à y.

On obtient facilement : $\frac{\partial U}{\partial y} = x + g'(y)$

On égalise ceci avec la ligne $\frac{\partial U}{\partial y} = 2x$ pour obtenir : $x + g'(y) = 2x$

Ainsi, la fonction g dépendant seulement de y vérifie : $g'(y) = x$

Vous comprenez toute l'absurdité de cette dernière relation ?!!

Conclusion : l'hypothèse que notre champ dérive d'un potentiel est donc absurde.

(merci à la fonction « Copier-Coller » !)

3) Encore une autre méthode (le très grand luxe !!!) pour répondre à la question posée

Si le champ $\vec{F}$ dérivait d'un potentiel, on aurait alors : $\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}$.

On pourrait alors calculer facilement la circulation de ce champ selon tout chemin allant d'un point A à un point B :

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\,.\overrightarrow{dl} = \int_A^B \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = \int_A^B dU = U(B) - U(A)$$

On voit ici que la circulation (ou le « travail » pour les physiciens…) de ce champ ne dépendrait que des points de départ et d'arrivée du chemin suivi.

Pour montrer que notre champ ne dérive pas d'un potentiel, il vous suffit de calculer le travail du champ entre A et B selon deux chemins différents et de faire remarquer les deux résultats différents !

Remarque : c'est du boulot de faire tout cela…. Mais c'est très classique. Il faut choisir deux points A et B, déterminer les deux chemins, faire les calculs….. (à vous de bosser un peu !!)

Remarque : vous n'auriez vraiment pas de chance si vous trouviez par hasard deux chemins différents donnant le même travail alors que le champ ne dérive pas d'un potentiel !!

Mais au fait, cette possibilité est-elle envisageable ??? Quel suspens…..

II Un choix malheureux…

Soit le champ défini selon $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$. On pose A(2 ; 0) et B(0 ; 1) deux points du plan.

Calculez $W_{A \to B}$, le « travail » de $\vec{F}$ le long du segment allant de A vers B.

Calculez ensuite le travail $W_{A \to O}$ de $\vec{F}$ le long du segment allant de A à O(0 ; 0) puis le travail $W_{O \to B}$ de $\vec{F}$ sur le segment allant de O à B. Faire enfin la somme de ces deux travaux.

Sauf erreur, vous avez sous les yeux la relation : $W_{A \to B} = W_{A \to O} + W_{O \to B}$

On pourrait alors croire que le champ $\vec{F}$ est conservatif, et qu'il dépend donc d'un potentiel. Vous pouvez chercher ce potentiel U pour comprendre tout l'intérêt de cet exemple astucieusement choisi !

III Un cas rigolo…

Dans la littérature spécialisée sur les fonctions de plusieurs variables, on peut trouver un champ fort instructif….. Soit $\vec{R} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ (lettre R pour *R*igolo…)

1) Vous prouverez facilement les relations : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ce qui pourrait nous laisser croire que ce champ dérive d'un potentiel… En intégrant, vous trouverez : $U(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

Ainsi, le travail de ce champ le long d'un cercle quelconque doit donner 0 (voir la formule vue en fin de I).

2) Calculons directement le travail le long du cercle trigonométrique. Pour cela, on peut prendre les coordonnées polaires qui sont bien pratiques. Vous obtiendrez facilement que le travail vaut 2π (en totale contradiction avec notre discussion ci-dessus !!).

3) D'où la question compréhensible : « **Mais c'est quoi ce bazar ??????** » (couleur rouge exprimant que ce cas *R*igolo commence en fait à m'énerver sérieusement……..)

4) Explications *please* ?

Pour comprendre (sans trop entrer dans les détails…), il faut noter que dans certains cours, on vous fait travailler sur des champs définis « sur $\mathbb{R}^2$ entier ». Or, notre cas rigolo ne l'est pas.

On voit bien qu'à l'origine, le dénominateur pose problème…

Donc, il faut comprendre en quoi le fait que notre champ non défini en un seul petit point ridicule situé à l'origine puisse tout chambouler.

Il faut ici citer un théorème de Poincaré (ce géant des sciences en a énoncé un certain nombre !) lié à la théorie des formes différentielles (des trucs du genre $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$). Une forme différentielle se rencontre fréquemment sous le signe intégral car c'est justement le travail élémentaire d'un champ le long d'un déplacement $\overrightarrow{dl}$. Vous voyez le lien ?

En fait, $\vec{F}\,.\overrightarrow{dl} = \omega$ lorsque l'on a $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$. Et ainsi, le travail est : $W_{A\to B} = \int_A^B \omega$

Bon, on voit qu'une forme différentielle est au cœur de notre affaire.

Théorème de Poincaré :

Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$. Soit ω une forme différentielle définie sur U.

Alors : ω fermée sur $U \Rightarrow \omega$ est exacte sur U.

Traduction dans le cadre de notre étude : si la forme $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ vérifie sur l'ouvert étoilé U la condition « ω fermée », qui est en fait $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, alors, ω admet une primitive. Ce qui facilitera le calcul de l'intégrale $\int_A^B \omega$!

Mais, il y a un « mais »… Ce théorème n'est plus valable si dans l'ouvert U, le moindre point est exclus. En effet, U ne serait alors plus « étoilé » (notion de topologie écartée dans notre discussion…). Le pourquoi de ce « mais » est lié à la démonstration du théorème (légèrement délicate…).

Conclusion pour notre champ « Rigolo » : le point O étant exclus du domaine de définition de notre champ, la forme différentielle exprimant le travail élémentaire n'admet pas de primitive sur un ouvert contenant le cercle trigonométrique. Autrement dit, le champ étudié ne dérive pas d'un potentiel.

Si l'on veut calculer le travail de ce champ le long de notre cercle trigonométrique, on ne peut pas le faire en utilisant le potentiel « frauduleusement » obtenu plus haut. Il faut le faire par un calcul direct en paramétrant le chemin le long du cercle. Voilà, la boucle est bouclée, vous savez tout !!

La figure de Henri Poincaré (1854-1912) est une légende en sciences. Auteur de traités de Mathématiques, de Physique, de Philosophie, c'est sans doute le dernier grand esprit universel capable d'embrasser tous ces domaines à son époque. Aujourd'hui, le champ des connaissances est devenu si vaste que personne ne maîtrise un seul de ces trois domaines !