

Trajectoires de comètes...



Dans ce problème, on considère un référentiel dont l'origine est le Soleil. Le télescope spatial Hubble vient de détecter deux masses de glace dont les trajectoires influencées par notre étoile semblent devoir se croiser dans une zone où la Terre pourrait se trouver...

Une analyse détaillée de ces trajectoires est entreprise au niveau international. Il est décidé de baptiser ces deux futures comètes Pika et Chu. Les trajectoires sont des courbes paramétrées selon les formules suivantes (calculées par les astronomes spécialisés) :

$$Pika \quad \begin{cases} x(t) = t^2 + 2t - 3 \\ y(t) = \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{2} \end{cases} \quad Chu \quad \begin{cases} x(t) = -\frac{2}{5}t^2 + \frac{8}{5}t + 2 \\ y(t) = -t^2 - 2t + 1 \end{cases}$$

- 1) Etudiez ces courbes paramétrées puis tracez avec soin les trajectoires de Pika et Chu.
- 2) Pour trouver A et B les points d'intersection des deux trajectoires, on note a le temps pour la trajectoire de Pika et b le temps sur la trajectoire de Chu (a et b indépendants *a priori*).
 - a) Donnez les équations vérifiées par a et b pour déterminez les points A et B.
 - b) On pose alors X et Y deux fonctions de b telles que :
$$\begin{cases} 5a^2 + 10a = X & L1 \\ a^2 - 4a = Y & L2 \end{cases}$$
 Déterminez a en fonction de X et Y. En utilisant cette écriture de a , donnez alors a^2 en fonction de X et Y avec : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$. En déduire, en injectant ces expressions dans L1, une équation vérifiée par b .
 - c) Résoudre cette équation numériquement et donnez les solutions au millième près. En déduire les valeurs de a possibles en utilisant la relation trouvée pour a en b).
 - d) Donnez les coordonnées précises au centième des points A et B.

Remarque : si la Terre venait à passer en ces points, on pourrait profiter de nombreuses étoiles filantes puisque la quantité de « poussières » à proximité serait très importante !

- e) Finalement, doit-on craindre une collision entre ces deux comètes (générant ainsi de nombreux débris potentiellement dangereux...)?
- f) Si les fonctions x et y sont données en unités astronomiques (1 u.a. = distance moyenne entre le Soleil et la Terre), doit-on craindre un croisement d'une des comètes avec la Terre ?

