Theory Of Mathematics' Immortal Curves

I know, that title is a little bit long !
Then, you could use an acronym using only the red letters if you want !!
We discuss here about some strange questions in a galaxy numbered 25/10/2021 (standard numerotation in the local group of galaxies). I present here some very interesting and original results about these immortal curves, but not only !

You will also find interesting informations about various items : « Suites », « Probabilités », « Intégration », « Transformée de Laplace »…

Enjoy the ride !! (en français pour la suite, si vous voulez bien……)

Calculons !

(quelques questions de *calcul* pour commencer…)

Q1 : Une suite arithmétique est définie par une relation du type $u_n = u_0 + n\,r$ avec r la raison de la suite et u_0 son premier terme. Si l'on vous donne deux valeurs de la suite, vous pourrez en déduire r (et u_0 si besoin. Vous pourriez même calculer n'importe quel autre terme !).

Exemple : $u_3 = 9$ et $u_{12} = 27$.
Posons les relations : $u_3 = u_0 + 3\,r = 9$ et $u_{12} = u_0 + 12\,r = 27$
Par soustraction, on en déduit $9\,r = 18$. Au final, on trouve $r = 2$

Q2 : Il existe une loi de probabilité appelée loi de Poisson (Siméon Denis Poisson était un célèbre mathématicien et physicien français) qui permet de calculer la probabilité qu'un événement peu fréquent survienne. Pour cela, on utilise la formule $p(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}$ où interviennent deux paramètres : k et λ.

k est le nombre de fois où un certain événement se produit dans un intervalle de temps donné. On note aussi X la variable aléatoire liée à ces événements. Par exemple, on peut noter X le nombre de buts marqués par une équipe durant un match. On pourrait alors évaluer la probabilité que l'équipe marque $k = 1$ but.

λ est un paramètre important de cette loi de probabilité : l'espérance, notée aussi E(X). Dit autrement, λ est la moyenne de X lorsque de nombreuses situations du même type sont observées. Par exemple, si l'année dernière notre équipe avait marqué une moyenne de 2 buts par match, on peut considérer $\lambda = 2$.

Au final, on pourrait donc estimer la probabilité pour que notre équipe marque 1 but dans son prochain match : $p(X = 1) = \frac{e^{-2}\,2^1}{1!} = e^{-2} \times 2 \approx 0{,}27$ (en prenant $e^{-2} \approx 0{,}135$)

Rappel sur la notion de factorielle d'un entier naturel (n !) pour ceux qui dorment près du radiateur :

$1! = 1$; $2! = 2 \times 1 = 2$; $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$; $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (compris ??)

Q3 : Un jour, on peut vous demander de compléter un tableau de contingence d'une série double avec des variables aléatoire X et Y en les considérant comme indépendantes, avec par exemple un tableau du genre :

	y_1	y_2	
x_1	n_{11}	n_{12}	16
x_2	n_{21}	n_{22}	24
	30	10	40

Dans ce cas, je vous renvoie à ma fiche « Une notion de probabilité » qui explique pourquoi il faudrait faire les calculs suivants !

$n_{11} = \frac{30\times16}{40} = 12$; $n_{12} = \frac{10\times16}{40} = 4$; $n_{21} = \frac{30\times24}{40} = 18$; $n_{22} = \frac{10\times24}{40} = 6$

Remarque : au pire, retenez la tactique du calcul, finalement assez simple…

Q4 : Pour calculer le module d'un complexe donné sous la forme $Z = \frac{a+ib}{c+id}$, il suffit de calculer les modules du haut puis du bas afin d'en faire finalement la division.

Exemple : $Z = \frac{1-i}{1+i}$
On pose : $|1-i| = \sqrt{(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ puis $|1+i| = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$
Au final, le module de Z est : $|Z| = \frac{|1-i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

Q5 : Comment calculer le PGCG d'un couple d'entiers ? Cette notion peut être révisée avec un cours d'arithmétique de terminale. Le PGCD est le « Plus Grand Commun Diviseur » des deux entiers. On note : PGCD(n ; m) = $n \wedge m$

Voyons un exemple avec le couple (168 ; 108).

Idée n°1 : écrire ces deux entiers sous forme d'un produit d'entiers, puis repérer ceux qui sont présents à la fois dans les deux écritures !

En tentant de petits calculs de divisions, avec les nombres premiers 2, 3, 5, 7… on peut trouver les écritures : $168 = 2\times2\times2\times3\times7$ et de même : $108 = 2\times2\times3\times3\times3$

On en déduit que le plus grand entier pouvant diviser à la fois 168 et 108 est : $2\times2\times3$. Ainsi, on obtient : $168 \wedge 108 = 12$

Idée n°2 : travailler avec des nombres plus petits en utilisant la méthode des différences. Le PGCD de deux entiers n et m (avec $n > m$) étant le même que le PGCD de $n - m$ et m, les calculs peuvent se simplifier en réitérant le procédé (on parle d'*algorithme*).

Donc : $168 \wedge 108 = 108 \wedge 60$ (en ayant fait 168 – 108 = 60)
Et on continue : $108 \wedge 60 = 60 \wedge 48$ (avec 108 – 60 = 48)
Encore : $60 \wedge 48 = 48 \wedge 12$ A ce stade, il est facile de voir que le résultat vaut 12.

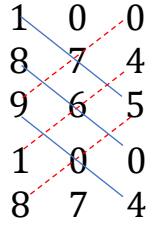
Si vous consultez des documents relatifs à ce sujet, vous verrez d'autres techniques plus élaborées…

Q6 : Comment calculer det(*M*), le *déterminant* d'une matrice carrée *M* de taille 3 ?

Voilà une bonne question ! En effet, un déterminant différent de 0 permet d'affirmer que *M* est inversible. Ceci est d'une grande utilité pour résoudre des systèmes d'équations… Mais revenons à notre déterminant.

Considérons par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Pour calculer son déterminant, on peut utiliser la règle de Sarrus valable uniquement pour une matrice de taille 3 (3 lignes et 3 colonnes).

On réécrit sous la matrice ses deux premières lignes, puis on fait des produits sur les diagonales…



(produits sur les lignes bleues puis sur les lignes rouges)

Produits sur les diagonales bleues : $1 \times 7 \times 5 = 35$; $8 \times 6 \times 0 = 0$; $9 \times 0 \times 4 = 0$
Leur total fait TB = 35 (TB pour total bleues)
Produits sur les diagonales rouges : $0 \times 7 \times 9 = 0$; $4 \times 6 \times 1 = 24$; $5 \times 0 \times 8 = 0$
Leur total fait TR = 24 (TR pour total rouges)

Le résultat du déterminant est enfin : det(*M*) = TB – TR = 35 – 24 = 11

Remarques :

- Notre matrice *M* est inversible puisque son déterminant est différent de zéro.
- Le déterminant d'une matrice carrée de taille 2 de type $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se calcule par un simple produit en croix : det(*A*) = $ad - bc$. Beaucoup plus facile !
- Le déterminant d'une matrice carrée de taille 4 se calcule en le développant par rapport à une ligne ou bien par rapport à une colonne (voir d'autres ressources…).

Q7 : Comment savoir si un point de l'espace M(*a* ; *b* ; *c*) est contenu dans un plan *P* dont on donne l'équation cartésienne $2x - 3y - z + 8 = 0$?

Il suffit pour les coordonnées de *M* de vérifier l'équation de *P*.

Exemple : quelle doit être la valeur de *c* pour que *G*(0 ; 0 ; *c*) appartienne à *P* ?
On pose : $2 \times 0 - 3 \times 0 - c + 8 = 0$ On obtient facilement : $c = 8$.

Q8 : L'acronyme TOMIC pourrait donner d'autres acronymes en changeant l'ordre de ces lettres. Par exemple MICTO, ou MOCTI… On appelle cela écrire des anagrammes du mot TOMIC. Mais combien d'anagrammes peut-on écrire à partir de ce mot ?

Il s'agit de dénombrer le nombre de *permutations* possibles d'un mot de cinq lettres distinctes. On a donc, d'après un cours sur les *dénombrements* : 5 ! = 120 possibilités.

On peut aussi signaler que le calcul se complique lorsque deux ou trois lettres sont identiques dans le mot de départ. Exemples : (i) TOMOC comporte deux O. Le nombre de ses anagrammes est alors calculé selon : $\frac{5!}{2!} = 60$; (ii) TOTIT comporte trois T. On aura alors un nombre d'anagrammes égal à : $\frac{5!}{3!} = 20$; (iii) TUTUT aura $\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$ anagrammes.

Q9 : Comment choisir la solution correcte d'une équation différentielle (E) assortie d'une condition initiale ?

Etudions un exemple : (E) $y' + y = e^x$ avec $y(0) = 0$.
On vous propose des solutions au choix :
A : $y(x) = \frac{1}{3}(e^x - e^{-x})$ B : $y(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ … E : $y(x) = e^x$
Comment faire notre choix ?

Méthode n°1 :

On peut calculer d'abord pour chaque fonction proposée sa valeur avec $x = 0$. Cela permet d'éliminer le choix E par exemple puisqu'il donne $y(0) = 1$ et donc ne valide pas la condition $y(0) = 0$.

Ensuite, on peut « injecter » la fonction proposée dans (E) pour voir si elle convient.

Testons par exemple (au hasard…) la fonction B : $y(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Elle a pour dérivée la fonction : $y'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

On peut alors calculer $y'(x) + y(x)$ pour voir si le résultat donne bien le « e^x » espéré au bout de l'équation (E). Un petit calcul montre que l'on trouve bien e^x ! La réponse B est donc correcte (puisqu'elle valide bien aussi la condition initiale).

Méthode n°2 :

On résout l'équation selon une procédure bien rodée (à voir dans un cours sur les équations différentielles) :

(i) solution homogène ; (ii) solution particulière ; (iii) ensemble des solutions ; et pour finir (iv) détermination de l'unique solution.

(i) Il faut résoudre : $y' + y = 0$. Les solutions sont de la forme $y_h(x) = C\ e^{-x}$ où C est une constante réelle quelconque (elle sera déterminé à la fin, en tenant compte de la condition initiale).

(ii) On cherche une solution particulière y_p de la forme $y_p(x) = k\ e^x$. On calcule sa dérivée puis on injecte $y_p(x)$ et $y'_p(x)$ dans (E) pour déterminer la valeur de la constante k. On obtient : $2\ k\ e^x = e^x$. On trouve donc $k = \frac{1}{2}$. Ainsi, une solution particulière de (E) est : $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$

(iii) L'ensemble des solutions de (E) est donné par : $y = y_h + y_p$. On obtient donc : $y(x) = C\ e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}$ où C reste à déterminer.

(iv) Il faut respecter $y(0) = 0$. On remplace x par 0 dans la forme ci-dessus et on obtient facilement $C = -\frac{1}{2}$

Conclusion de ces quatre étapes : la solution est celle donnée en B.

Q10 : Combien vaut $I = \int_0^1 \int_0^3 x^2 y\ dx\ dy$?

Rappel pour commencer : le premier symbole d'intégration entre 0 et 1 s'adresse à la variable *x*, le second à la variable *y*. C'est toujours présenté ainsi, dans l'ordre usuel des variables.
De même, on écrit à la fin *dx dy* pour fermer l'intégrale, en respectant l'ordre des variables.

Dans ce cas, le domaine d'intégration est un rectangle que l'on peut formaliser selon l'écriture $[0\ ;\ 1] \times [0\ ;\ 3]$. De plus, la fonction à intégrer est de la forme $f(x, y) = g(x)\ h(y)$ (produit de deux fonctions, l'une dépendant seulement de *x*, l'autre dépendant seulement de *y*).

Dans un tel cas *très particulier* (voir un cours pour réviser le cas général), on peut simplifier notre travail selon : $I = \int_0^1 x^2 dx \ \int_0^3 y\ dy$.

D'où : $I = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^3 = \frac{1}{3}\frac{9}{2} = \frac{3}{2}$

Q11 : Comment trouver *B* dans la relation $F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1}$?

Rappel : écrire une fraction sous forme de somme de termes se nomme « décomposition en éléments simple ». On rencontre ce type de travail dans des exercices liés à la transformée de Laplace.

Pour faire simple, on peut isoler *B* en multipliant la relation par p^2 de chaque côté.
Il vient : $\frac{1}{(p+1)} = p\ A + B + p^2 \frac{C}{p+1}$. Il reste alors à remplacer *p* par 0 pour obtenir *B* !
Ici, on obtient : $\frac{1}{1} = 0 + B + 0$. Soit $B = 1$ (et c'est tout !).

Remarque : et si on vous demandait *C* ? On peut isoler *C* en multipliant la relation de départ par $(p + 1)$. Il vient : $\frac{1}{p^2} = (p+1)\frac{A}{p} + (p+1)\frac{B}{p^2} + C$. Pour avoir *C*, il reste à remplacer *p* par –1 dans cette nouvelle relation. On obtient : $\frac{1}{(-1)^2} = C$. Donc $C = 1$.

Remarque bis : et si on vous demandait *A* ? Le problème est qu'en multipliant la relation de départ juste par *p*, il restera un *p* sous le *B*, et on ne pourra pas remplacer *p* par 0 du coup… Comment faire alors ? Multiplions la relation par *p*, puis prenons la limite de chaque côté lorsque *p* tend vers $+\infty$. Vérifiez que l'on obtient la relation : $0 = A + C$. Il resterait à obtenir *C* (méthode vue ci-dessus) pour trouver *A* ensuite. On obtient : $A = -1$.

(c'est beau les maths….)

Q12 : On peut modéliser une fonction f périodique par la somme de fonctions de type cosinus et sinus à l'aide de la technique des « séries de Fourier ». Classiquement, on commence par calculer un coefficient noté a_0 selon la formule : $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ où T est la période de f.

Notez bien : cette formule doit être comprise selon : « il faut calculer la valeur moyenne de f sur une période ». Donc, si l'on comprend cela, on peut tout aussi bien effectuer le calcul demandé selon : $\frac{1}{T}\int_{-T}^0 f(t)\,dt$ ou bien $\frac{1}{T}\int_T^{2T} f(t)\,dt$ ou encore $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$. Il faut juste que la longueur de l'intervalle d'intégration soit de longueur T.

Exemple : f est de période 2π et définie sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ par $f(x) = |x|$.

Nous allons donc poser : $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -t\,dt + \int_0^{\pi} t\,dt\right)$

En effet, on utilise $|t| = -t$ sur $[-\pi\ ;\ 0]$ et $|t| = t$ sur $[0\ ;\ \pi]$.

Le reste du calcul est simple… On trouve finalement un résultat égal à $\frac{\pi}{2}$.

Q13 : Soit $f(x,y,z) = y^2\,sin(x) + ye^{2z}$. On demande son gradient en $M(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$.

Il faut utiliser : $\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k}$.

On a les dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\,cos\,(x)$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,sin(x) + e^{2z}$ $\frac{\partial f}{\partial z} = 2ye^{2z}$

Au point M, elles sont donc :

$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 2^2\,cos(0) = 4$ $\frac{\partial f}{\partial y}(M) = 2\times 2\,sin(0) + e^{2\times 0} = 1$ $\frac{\partial f}{\partial z}(M) = 2\times 2e^{2\times 0} = 4$

Donc finalement : $\overrightarrow{grad}\,f\,(M) = 4\,\vec{\imath} + 1\,\vec{\jmath} + 4\,\vec{k}$ = (4 ; 1 ; 4).

Q14 : Soit $f(x,y) = y^2e^{-xy}$. Calculons son laplacien avec $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

On a : $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\,(-ye^{-xy}) = -y^3e^{-xy}$ puis $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^4e^{-xy}$ (on a redérivé par rapport à x)

De même : $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-xy} - xy^2e^{-xy} = (2y - xy^2)e^{-xy}$ (avec (uv)'= u'v + uv')

Puis : $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2-2xy)e^{-xy} + (2y - xy^2)(-x)e^{-xy} = (2 - 4xy + x^2y^2)e^{-xy}$

Finalement, on obtient : $\Delta f = (y^4 + 2 - 4xy + x^2y^2)e^{-xy}$

Q15 : Avec deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut construire un parallélogramme :

On peut ensuite calculer son aire selon : Aire = $|det\,(\vec{u},\vec{v})|$ ou aussi : Aire = $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$

Exemple : On considère les vecteurs définis par leurs coordonnées $\vec{u}(-2\ ;\ 7)$ et $\vec{v}(3\ ;\ -8\ )$

Ici, on applique la formule du déterminant (plus rapide que celle du produit vectoriel) :

$det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = |16 - 21| = 5$ unités d'aire.

Remarque : Attention, les barres autour de 16 – 21 signifient « valeur absolue », alors que les barres entourant les quatre coordonnées indiquent que l'on calcule un déterminant !

Q16 : En mathématiques, il faut être logique.

Discutons par exemple du symbole « et », fort utile en mathématiques ou en logique. On peut lire des morceaux de phrases du genre : « $x > 0$ et $y > 0$ » ; « l'ampoule est branchée et le courant passe ».

Le « et » est donc bien utile pour relier des propositions. Il répond à certaines règles qui sont définies à l'aide de sa table de vérité, ceci afin d'éviter toute ambiguïté.

Pour deux propositions A, B la table du « et » est :

Dans ce tableau : 0 signifie Faux ; 1 signifie Vrai.

A	B	A et B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ainsi, d'après ce tableau, la proposition « A et B » est déclarée vraie à la condition que les deux propositions de départ soient vraies.

On peut aussi présenter cette table en utilisant un tableau à double entrée sous la forme ci-contre :

Ceci répondrait à la question : « Complétez la table de la loi ET ».

Table du ET		
B \ A	0	1
0	0	0
1	0	1

Raisonnons un peu à présent….

Q1 : Pour trouver la limite d'une suite coincée entre deux autres, le fameux théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement) est très utile.

Par exemple, si on a $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$, il suffit de vérifier que la limite des termes à gauche et à droite est identique pour obtenir la limite de la suite encadrée. Ici, on obtient facilement une limite égale à 1 lorsque n tend vers l'infini.

Q2 : Parfois, il suffit d'examiner les débuts de phrases pour remettre dans l'ordre des propositions liées à un théorème que l'on ne maîtrise pas bien. Prenons un exemple avec quatre propositions liées à la loi des grands nombres (théorie des probabilités).

Le résultat à démontrer est $\lim_{n\to+\infty} \big(P(|M_n - \mu| \geq t)\big) = 0$, il est annoncé au départ.

La proposition contenant cette écriture sera donc logiquement mise en dernier ! Autre indice, la mention « d'après le théorème des gendarmes… » est souvent utilisée pour conclure un résultat. Cette phrase doit donc être logiquement placée vers la fin d'une démonstration.

La proposition contenant « Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V}{nt^2} = 0$ » doit logiquement être mise après une ligne où le terme $\frac{V}{nt^2}$ apparaît ! Ceci permet de retrouver l'ordre entre ces deux propositions.

Il reste alors peu de travail à faire pour replacer dans l'ordre logique les quatre propositions.

Q3 : Pour résoudre un système d'équations linéaires avec la méthode des déterminants, la logique est encore utile (mais il vous faut étudier cette technique fondamentale si besoin !). La méthode consiste dans l'ordre à :

- Poser le système d'équations sous forme matricielle.
- Calculer le déterminant de la matrice pour vérifier qu'il admettra une solution unique.
- Calculez les valeurs des inconnues *x* et *y* (voire *z* si on a trois inconnues !).
- Conclure la résolution en présentant les résultats avec soin.

Q4 : Pour comprendre une question liée à la géométrie dans l'espace, il faut connaître un minimum de choses. Commençons par un…

Rappel : Pour montrer qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal (fait un angle droit) à un plan *P* contenant des points B, G et E, on peut par exemple vérifier que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs de *P* (définis à l'aide de B, G et E) formant une base de ce plan.

On peut alors remettre les choses dans le bon ordre et laisser de côté certaines propositions inutiles dans le cadre de cette démonstration.

- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BE}$.
- Vérifier que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
- Calculer les produits scalaires de ces vecteurs avec le vecteur $\vec{n}$.
- Conclure soigneusement.

Q5 : La résolution d'une équation du type $y' = \lambda y(1-y)$ n'est pas simple ! Très difficile de remettre dans le bon ordre de nombreuses étapes si l'on ne maîtrise pas la technique du changement de fonction inconnue… Je vous propose ici la résolution détaillée.

En supposant que la solution cherchée *y*(*t*) ne s'annule jamais, on peut dire :

$$y' = \lambda y(1-y) \iff y' = \lambda(y-y^2) \iff \frac{1}{y^2}y' = \lambda(\frac{1}{y}-1)$$

On pose ensuite une nouvelle fonction inconnue $z = \frac{1}{y}$ dont la dérivée par rapport à la variable *t* s'écrit : $z'(t) = -\frac{1}{y^2}y'(t)$. On voit alors que notre équation se transforme en : $-z' = \lambda(z-1)$. On peut l'écrire sous la forme : $z' + \lambda z = \lambda$ (plus facile à résoudre)

On sait trouver la forme des solutions : $z(t) = C\ e^{-\lambda t} + 1$

Comme $z(t) = \frac{1}{y(t)}$, on a $z(0) = \frac{1}{y(0)} = 100.$ Ceci donne : $C\ e^0 + 1 = 100$. D'où $C = 99$.

Ainsi : $z(t) = 99\ e^{-\lambda t} + 1$ et finalement : $y(t) = \frac{1}{99\ e^{-\lambda t}+1}$

Remarque : on vérifie facilement que notre hypothèse de travail est bien validée puisque cette solution ne s'annule jamais.

Q6 : Un domaine *D* du plan, modélisant une plaque plane, possède un centre de gravité noté en général G. Ses coordonnées sont : $x_G = \frac{1}{A}\iint_D\ x\ dx\ dy$ et $y_G = \frac{1}{A}\iint_D\ y\ dx\ dy$ où *A* représente l'aire du domaine *D* selon l'expression : $A = \iint_D\ 1\ dx\ dy$.

Par exemple, on peut calculer y_G pour le cas $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ 2x^2 \leq y \leq 3\}$.

Avec les conditions imposées, on peut en déduire les encadrements suivants concernant nos variables : $0 < x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$ (en exploitant $2x^2 \leq 3$) et lorsque *x* est fixé : $2x^2 \leq y \leq 3$.

Ainsi, on a : $A = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(\int_{2x^2}^3 dy\right)\ dx = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}[y]_{2x^2}^3\ dx = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} 3 - 2x^2\ dx = \left[3x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}$

Soit : $A = 3\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3$

Ensuite : $\iint_D\ y\ dx\ dy = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(\int_{2x^2}^3 y\ dy\right)\ dx = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{2x^2}^3\ dx = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2}(9 - 4x^4)\ dx$

$$= \left[\frac{9}{2}x - \frac{2}{5}x^5\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5$$

Et finalement : $y_G = \frac{\frac{9}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5}{3\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3}$

Q7 : Comment résoudre une équation différentielle avec la transformée de Laplace ? Pour répondre à une telle question, il faut d'abord quelques rappels !

- Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) est né dans une famille d'agriculteurs dans le Calvados. Rien ne le prédestinait donc à une vie passée à l'étude des sciences.
- On note par la suite *u*(*t*) la fonction de Heaviside valant 0 pour les temps négatifs et 1 à partir de *t* = 0. Cette fonction indique l'intention de travailler à partir d'un événement localisé dans le temps à *t* = 0. On parle ensuite de fonction causale, liée à une cause donnée.

- Oliver Heaviside (1850-1925) est un physicien anglais ayant eu un rôle important dans la théorie de l'électromagnétisme que venait de proposer le fameux Maxwell…
- Soit $f(t)\,u(t)$ une fonction causale (notée aussi simplement $f(t)$ dans le contexte d'un cours sur la transformée de Laplace). Sa transformée de Laplace est notée F(p) ou encore $\mathcal{L}[\,f(t)\,u(t)]$.
- La transformée de sa dérivée $f'(t)$ donne : $\mathcal{L}[\,f'(t)\,u(t)] = \text{p F(p)} - f(0^+)$.

Etudions par exemple l'équation $f' = f + t\,e^t$ avec la condition initiale $f(0) = -1$.

La transformée de Laplace de cette équation est par linéarité :

$$\mathcal{L}\big[\,f'^{(t)}u(t)\big] = \mathcal{L}[\,f(t)\,u(t) + t\,e^t\,]$$

$$= \mathcal{L}[\,f(t)\,u(t)\,] + \mathcal{L}[\,t\,e^t\,]$$

D'où : $\text{p F(p)} + 1 = \text{F(p)} + \mathcal{L}[\,t\,e^t\,]$

Il faut ensuite utiliser : $\mathcal{L}[\,t\,u(t)] = \frac{1}{p^2}$ Ensuite, on décale p de 1 en raison du terme e^t.

Donc, on utilise : $\mathcal{L}[\,t\,e^t\,] = \frac{1}{(p-1)^2}$

Finalement, notre équation de départ devient : $\text{p F(p)} + 1 = \text{F(p)} + \frac{1}{(p-1)^2}$

Isolons l'inconnue F(p) : $\text{(p – 1) F(p)} = \frac{1}{(p-1)^2} - 1$

Au final, on obtient : $\text{F(p)} = \frac{1}{(p-1)^3} - \frac{1}{p-1}$

Il resterait ensuite pas mal de travail pour trouver l'original $f(t)$ et ainsi résoudre l'équation de départ, mais ceci est une autre histoire…

Q8 : La technique des séries de Fourier permet de modéliser une fonction périodique f quelconque (définie sur une période T par un bout de polynôme ou d'exponentielle, ou par une fonction discontinue…) sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions cosinus et sinus de fréquences multiples de la fréquence de f. On dit « f est décomposée en série de Fourier ».

Exemple : supposons $f(t) \sim a + b\,cos(t) + c\,cos(2t) + d\,cos(3t) + \cdots$ pour une certaine fonction paire f de période 2π. Avec cette décomposition de f, on pourrait dire que le morceau $c\,\cos(2t)$ représente la deuxième harmonique de cette modélisation. On pourrait même donner son amplitude égale à la valeur absolue du coefficient c.

Autre exemple : $s(t) = 2\,cos\,(20\pi\,t - \frac{\pi}{4})$. Dans ce cas simple, on remarque que s est facile à décomposer sous forme d'une série de Fourier. Il suffit d'utiliser la relation trigonométrique bien connue : cos(a – b) = cos(a) cos(b) + sin(a) sin(b)

Ainsi, avec $a = 20\pi t$ et $b = \frac{\pi}{4}$ on peut écrire : $s(t) = \sqrt{2}\,cos(20\pi\,t) + \sqrt{2}\,sin(20\pi\,t)$

On constate que cette expression ne comporte pas d'harmonique de rang plus grand que 1. On peut alors dire par exemple que la troisième harmonique de s a une amplitude égale à 0.

Q9 : Tout le monde sait qu'une force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel *V* lorsque le rotationnel de $\vec{F}$ est nul (mon boulanger me l'a confirmé ce matin…).

Exemple : Pour montrer que $\vec{F} = -C\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$ dérive d'un potentiel, calculons $\overrightarrow{rot}\,\vec{F}$.

Avant de commencer, je propose d'écrire $\vec{F}$ sous une autre forme en profitant de l'expression du vecteur position $\vec{x} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$.

Ainsi : $\vec{F} = -C\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} = -C\left(\frac{x}{\|\vec{x}\|^2}\,\vec{\imath} + \frac{y}{\|\vec{x}\|^2}\,\vec{\jmath} + \frac{z}{\|\vec{x}\|^2}\,\vec{k}\right)$

Les coordonnées de $\vec{F}$ sont donc : $\left(\frac{-C\,x}{\|\vec{x}\|^2} ; \frac{-C\,y}{\|\vec{x}\|^2} ; \frac{-C\,z}{\|\vec{x}\|^2}\right)$

Il vous reste juste à en calculer le rotationnel pour constater que ses trois coordonnées seront bien égales à 0 (petites révisions sur les dérivées partielles au passage, avec l'expression du fameux rotationnel ! Vous pouvez vous aider d'un document appelé « Opérateurs vectoriels » que vous trouverez sur un site web bien connu…)

Q10 : Pour associer « Deux vecteurs sont colinéaires » et « Leur produit vectoriel est nul », il faut juste connaître son cours ! Question facile bonne à prendre…

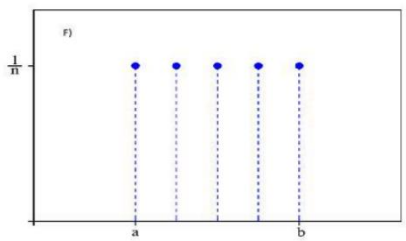
Q11 : Pour calculer la valeur d'une expression booléenne, il faut utiliser les règles en vigueur dans cet univers. Une de ces règles est étonnante : Pour tout élément *x*, on a toujours la relation : $x + 1 = 1$.

Calculons par exemple la valeur de $a.b + c$ en utilisant $a = 0$, $b = 1$ et $c = 1$.
Le produit (noté « . ») étant prioritaire, calculons d'abord : $a.b = 0 \,.\, 1 = 0$
Ensuite, on calcule : $0 + c = 1$. En conclusion : $a.b + c = 1$.
Remarque : les autres propositions fournies étaient toutes « totalement fausses ».

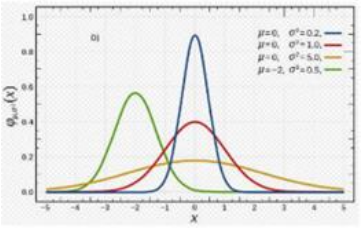
Voici une section **« Représenter »** à présent…

Q1 : Pour associer une loi de probabilité avec le graphique de sa densité ou de sa masse, il faut connaître le domaine de manière assez précise… La question est donc plutôt délicate. Je vous propose quelques pistes en répondant dans l'ordre de la plus grande facilité.

Info : merci à Wikipédia pour les images utilisées ici…

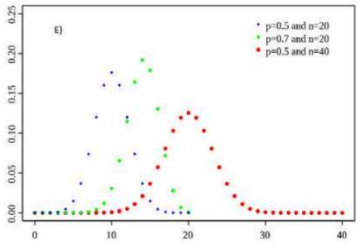


- Ce graphe est celui d'une loi discrète (les points sont séparés) et uniforme (tous les points sont à la même hauteur). Pour cette loi, la probabilité d'observer tel ou tel résultat parmi *n* possibles est une constante égale à $\frac{1}{n}$. C'était le graphe le plus facile…

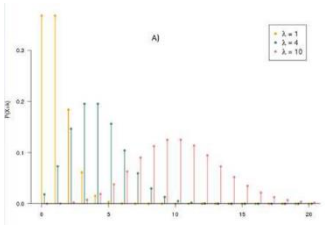


- Ce graphe, où l'on voit de belles courbes « en cloche », est lié à la très connue loi normale. On voit d'ailleurs sur le graphique des paramètres μ et σ^2 typiques de ce type de loi. En général, on note $N(\mu\,;\,\sigma)$ une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ. Les courbes sont continues car la variable l'est.

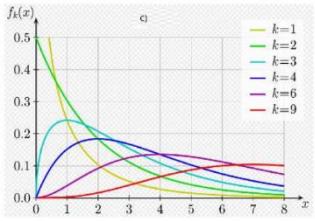
Remarque : révisez au besoin les notions de « variable discrète », « variable continue ».



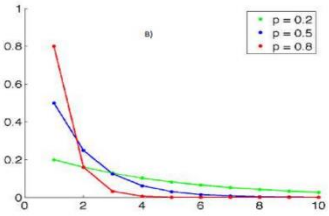
- Ce graphe est lié à la loi binomiale, elle dépend de deux paramètres notés *n* et *p* indiqués sur le graphe. Lorsque *p* vaut 0,5 le graphe est symétrique par rapport à $\frac{n}{2}$. La loi étant discrète, les points sont isolés.



- Le graphe proposé à gauche sent bon la loi de Poisson ! On distingue des informations sur le paramètre classiquement noté avec la lettre grecque lambda : λ. De plus, on a bien ici une loi discrète.



- Le graphe ci-contre est celui de la loi du khi2 qui ne dépend que d'un paramètre noté k (le fameux nombre de degré de liberté). Ces courbes de densité sont moins connues, j'ai donc laissé ces graphes vers la fin ! Cette loi est liée à une variable continue, les courbes présentées ont donc aussi ce caractère.



- Ce graphe est celui lié à une loi géométrique. La loi dépend d'un paramètre noté *p* et elle est discrète. Les courbes en lignes brisées confirment cet aspect (mais elles sont un peu trompeuses malgré tout).

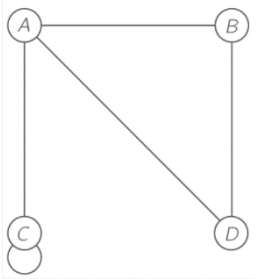
Q2 : Les coordonnées du point moyen *G* d'une série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ à deux variables sont définies par : $x_G = \frac{\sum x_i}{N}$ et $y_G = \frac{\sum y_i}{N}$ avec *N* le nombre de points de la série.

Exemple : les x_i sont $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; … ; $x_5 = 5$. La valeur de x_G *est* $\frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$.

Q3 : Pour savoir où sont placés les points d'affixe *z* tels que Im($(2 - i)\,z$) = 2, mieux vaut faire le calcul détaillé ci-dessous (même si on sent qu'il y a une droite dans l'air…).

Posons $z = x + i\,y$. Alors : $(2 - i)\,z = (2 - i)\,(x + i\,y) = (2x + y) + i\,(2y - x)$

Ainsi Im($(2 - i)\, z$) = 2 donne : $2y - x = 2$.
On obtient finalement la droite d'équation : $x - 2\,y + 2 = 0$

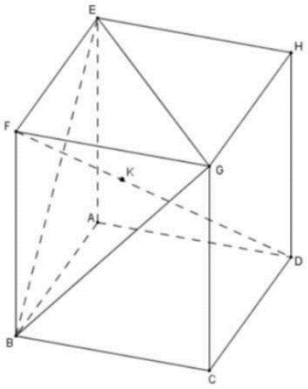


Q4 : Si l'on vous propose de déterminer la matrice d'adjacence d'un graphe. Que faire ? Cette question consacrée au lien entre graphe et matrice vous semblera « ultra simple » après avoir consulté mon document « Graphes et Matrices » sur ce même site. Au boulot !

Après un peu de travail, vous trouverez : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice obtenue est symétrique puisque nous avons ici un graphe non orienté.

Q5 : Pour déterminer ou bien reconnaître l'équation paramétrique d'une droite de l'espace, il suffit d'avoir les coordonnées de deux de ses points.



Considérons le classique cube ABCDEFGH de côté 1 avec le repère usuel $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Pour définir la droite (FD), il faut déterminer les coordonnées : F(1 ; 0 ; 1) et D(0 ; 1 ; 0).
Ensuite, on peut dire : M(x ; y ; z) ∈ (FD) s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{FM} = t\,\overrightarrow{FD}$.

Avec : $\overrightarrow{FM} = (x - 1\,;\, y\,;\, z - 1)$ et $\overrightarrow{FD} = (-1\,;\, 1\,;\, -1)$, on obtient les relations suivantes : $\begin{cases} x - 1 = t(-1) \\ y = t(1) \\ z - 1 = t(-1) \end{cases}$ soit encore : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ (et voilà !).

Remarques :

a) La relation $\overrightarrow{FM} = t\,\overrightarrow{DF}$ aurait donné un système similaire où les t seraient affectés d'un coefficient opposé. Mais bon, on s'y retrouve avec un peu d'entraînement.

b) On aurait pu utiliser $\overrightarrow{DM} = t\,\overrightarrow{FD}$ puis modifier t en $(t + k)$ pour retrouver le bon système en choisissant bien la valeur de k.

c) On pourrait aussi tester les coordonnées de F et D dans chacun des systèmes proposés.

d) On aurait encore pu tester chacun des systèmes avec $t = 0$ pour « voir » si le point obtenu est bien sur la droite (FD). Pour cela, il faut bien « voir » en 3D.

Q6 : On considère ici la fractale du triangle de Sierpinski ci-contre.

Comment choisir, parmi différentes propositions, la formule donnant le périmètre total des triangles blancs à chaque étape ? Belle question.

Tout d'abord, précisons qu'une fractale est une figure similaire à grande et à petite échelle. On comprend alors que la figure ne comporte que des triangles (Δ) équilatéraux. Seule la longueur du côté changera. Le Δ noir de départ a probablement (!!)pour côté 1.

A - ○ $p_{n+1} = p_n + (\frac{3}{2})^{n+1}$

B - ○ $p_{n+1} = (\frac{3}{2})^{n+1}$

C - ○ $p_{n+1} = p_n + (\frac{3}{2})^{n}$

D - ○ $p_{n+1} = p_n + (\frac{1}{2})^{n+1}$

E - ○ $p_{n+1} = p_n + (\frac{3}{2})^{n+2}$

Les sommets du premier Δ blanc sont placés au milieu de chaque côté du Δ de départ. Ainsi, le premier Δ blanc a un côté égal à $\frac{1}{2}$. On obtient alors la valeur du périmètre à l'étape 1 : $p_1 = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

On peut alors éliminer les formules C, D et E qui donnent respectivement (en remplaçant *n* par 0 afin d'obtenir p_1) : $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{9}{4}$.

Seules les formules A et B restent utiles. On doit calculer p_2 pour faire notre choix.

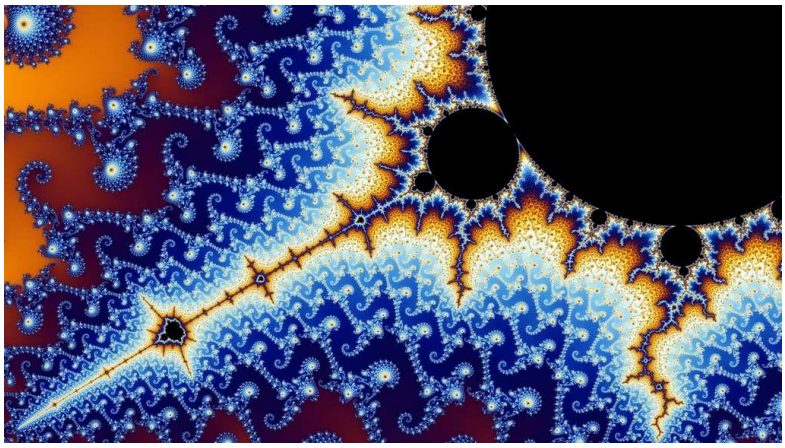
p_2 = périmètre du grand Δ blanc + 3 fois le périmètre du nouveau petit Δ blanc (dont le côté deux fois plus petit, soit $\frac{1}{4}$).

Comme le périmètre d'un petit Δ blanc est égal à $\frac{3}{4}$, on obtient : $p_2 = \frac{3}{2} + 3 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$

Enfin, en remplaçant *n* par 1 dans les formules A et B pour obtenir p_2, on trouve que A est la bonne réponse.

Question bonus : en quoi cette figure de Sierpinski est-elle remarquable ???

Si l'on poursuit infiniment le procédé, on obtient une figure tenant sur une surface finie (l'intérieur du triangle noir de départ), mais dont le périmètre tend vers l'infini ! Pour aller plus loin, cherchez des infos sur la longueur des côtes de la Bretagne, sur la structure fractale du chou romanesco, sur l'ensemble de Mandelbrot (ci-dessous)...



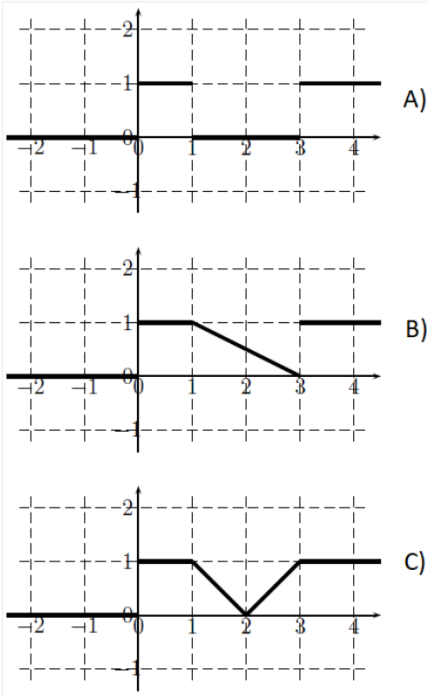
Q7 : La longue présentation de cette question était une belle diversion…

En fait, seules la première et la dernière lignes sont vraiment utiles. On demande juste les conditions pour que (E) soit bien du second ordre (il faut $1 + a^2 \neq 0$) et qu'elle existe bien (la racine existe lorsque $1 - 3a^2 \geq 0$). C'est tout !

Remarque : la condition $1 + a^2 \neq 0$ n'est pas trop contraignante !

Q8 : Jolie question en lien avec le domaine des intégrales doubles. Il faut juste savoir lire un graphique avec des courbes pour y répondre. De plus, les expressions des courbes utilisées sont fournies *à la fois* sur trois des quatre graphiques *et dans* l'écriture des domaines !! Dans l'ordre, on clique donc sur : B ; D ; C ; A.

Q9 : Petite astuce pour mieux comprendre un des aspects de la fonction de Heaviside $u(t)$. Elle passe de 0 à 1 de manière discontinue en $t = 0$. Il se passe donc « quelque chose » à cet instant !! De même, la fonction $u(t - a)$ sera utilisée lorsqu'un phénomène survient au temps $t = a$ (la courbe $u(t - a)$ est celle de $u(t)$ mais décalée de a vers la droite). Ainsi, on peut utiliser cette astuce pour faire les bons choix !



Analyse (rapide) des graphiques :

La fonction A ne doit avoir que des $u(t)$, $u(t - 1)$, $u(t - 3)$ car les instants $t = 0$, $t = 1$ et $t = 3$ sont les seuls où on voit un changement pour la fonction $f(t)$.

La fonction B ne doit pas comporter de $u(t - 2)$ car il ne se passe rien de spécial à $t = 2$. Elle doit aussi comporter une fonction du type $at + b$ en la variable t pour rendre compte de la partie inclinée.

La fonction C peut être déduite plus facilement…

Remarque : Que ces astuces ne vous empêchent pas de travailler plus sérieusement cette notion !!

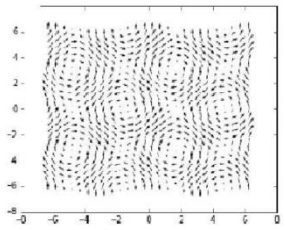
Q10 : Pour discuter des gradients, laplaciens et autres champs, rappelons d'abord certains points !

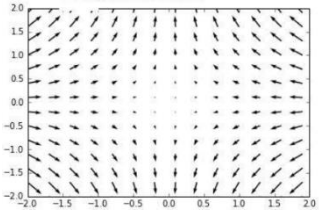
Il faut savoir qu'à partir d'un champ scalaire, on peut calculer un autre champ scalaire avec l'opérateur laplacien, ou bien un champ vectoriel avec l'opérateur gradient. De même, à partir d'un champ vectoriel, on peut calculer un champ scalaire avec la divergence, ou bien un champ vectoriel avec le rotationnel.

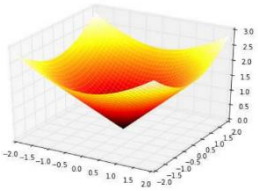
Par ailleurs, on peut présenter un champ scalaire défini par $f(x, y)$ sous la forme d'un graphique 3D avec sa surface représentative ou bien sous la forme d'une figure 2D indiquant les zones où la valeur de f est plus ou moins grande en utilisant un code couleur (rouge pour les plus grandes valeurs et bleu pour les plus petites) ou alors avec des lignes de niveaux de f.

Enfin, on peut présenter un champ vectoriel en 2D en dessinant des vecteurs à de nombreux endroits du plan. Pour le cas particulier d'un champ rotationnel on peut préciser avec un code couleur l'intensité du champ (norme plus ou moins grande) et un code couleur associé selon l'orientation du rotationnel (vers le lecteur en dominante rouge et dans le sens opposé en dominante bleue).

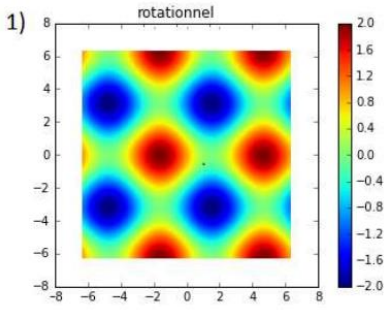
Voici des exemples de champs vectoriels :

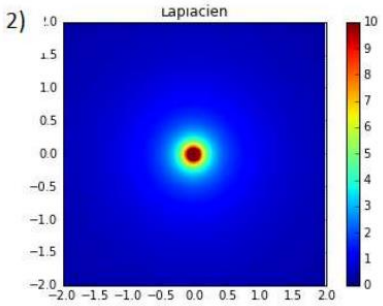
A 

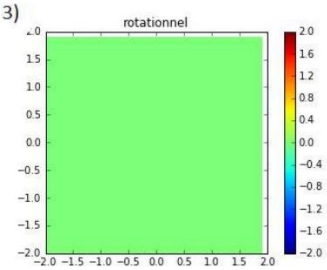
B 

Voici un exemple de champ scalaire : C 

Voici des exemples de calculs :

1) 

2) 

3) 

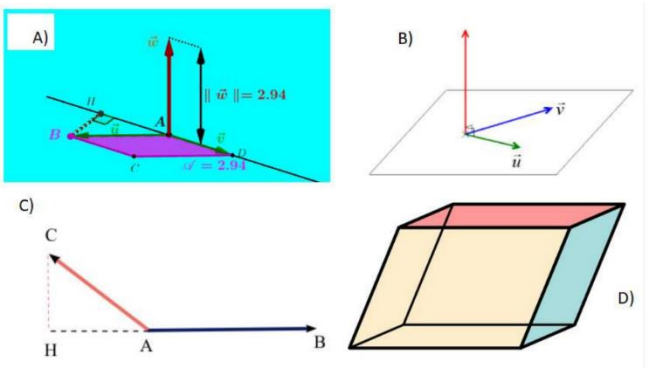
Tout ceci étant clarifié (merci qui ?), on peut associer facilement : A et 1) (structure en « tourbillon ») ; C et 2) (effet de pointe en bas du cône). Puis, on associe B et 3 (le champ B ne semble pas avoir de caractère tournant, il aura donc un rotationnel nul).

Q11 : Pas de soucis *a priori* pour associer des schémas liés aux calculs vectoriels de base.

On utilise le produit vectoriel pour obtenir l'aire d'un parallélogramme (en A) ou bien pour « générer » une troisième dimension orthogonale à deux vecteurs non colinéaires (en B).

Le produit scalaire est bien utile pour faire une projection (en C) (ou pour calculer un angle).

Enfin, le volume d'un parallélépipède (D) peut être obtenu avec un produit mixte.



Communiquons un peu à présent…

Q1 : Soit une suite définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Si l'on a pu prouver que la suite est convergente, alors sa limite ℓ vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.

Exemple : $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$. Sa limite doit vérifier : $\ell = \frac{9}{6-\ell}$
Ainsi : $\ell(6-\ell) = 9 \Leftrightarrow \ell^2 - 6\ell + 9 = 0 \Leftrightarrow (\ell-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 3$

Remarque : une équation du second degré pouvant donner deux solutions, il faut parfois vérifier que la valeur choisie est compatible avec la suite ! Cela peut dépendre de sa valeur initiale.

Q2 : Soit la variable aléatoire $M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ avec les X_i indépendantes et d'espérance μ. On considère l'inégalité $P(|M_n - \mu| > \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$ avec n = 1000, μ = 0,4, δ = 0,1 et enfin V = 0,24. On obtient facilement : $P(|M_n - 0{,}4| > 0{,}1) \leq 0{,}024$ (*)

Comment peut-on traduire cette relation (*) ?

D'abord, on peut écrire : $|M_n - 0{,}4| > 0{,}1 \Leftrightarrow M_n - 0{,}4 > 0{,}1$ ou $M_n - 0{,}4 < -0{,}1$

$\Leftrightarrow M_n > 0{,}5$ ou $M_n < 0{,}3 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i > 500$ ou $\sum_{i=1}^{n} X_i < 300$

Si $\sum_{i=1}^{n} X_i$ représente le nombre de personnes répondant effectivement à un sondage (avec une espérance de 0,4 pour chaque X_i), on pourrait alors traduire la relation (*) selon la phrase :

« Lorsque l'on appelle 1000 personnes, la probabilité que le nombre de personnes répondant soit en dehors de l'intervalle]300 ; 500 [est inférieure à 0,024. La précision est de 0,1 et le risque est de 0,024 ».

Remarque : la précision est liée à la largeur de l'intervalle centré sur μ. Le risque est ici la probabilité pour que M_n soit malgré tout en dehors de l'intervalle.

Q3 : Conseil pour cette question : réviser les « boîtes à moustaches » et bien lire les phrases pour éviter tout contresens ! La seule proposition correcte est ici la B.

Q4 : Révisez l'utilisation des symboles ∀, ∃, ⇔.

Revoir avec soin le théorème de Bézout vu en arithmétique… La bonne réponse : A.

A - ○ $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1$

Q5 : Pour réviser le calcul de l'inverse d'une matrice 3×3, qui utilise la notion de cofacteur, voyez sur mon site…

Le rappel proposé dans cette question donne la solution : réponse B.

Q6 : Une petite question de cours !! Cliquer sur A.

Q7 : Dans l'ordre : A, B, C et D. Conseil : révisez les séries de Fourier pour mieux comprendre ces graphiques et tout ce qu'ils sous-entendent… Il y aurait beaucoup trop de choses à dire ici pour être tranquille sur cette question.

Q8 : Encore une question de cours… mais cette fois-ci, assez délicate car rarement explicitée. Néanmoins, on pouvait deviner que 2 serait la bonne réponse.

Rappel (?) de cours : Une méthode d'interpolation de degré *n* est une méthode pour laquelle la formule approchée est exacte pour tout polynôme de degré au plus *n*, et inexacte pour au moins un polynôme de degré *n* + 1.

Q9 : Mon document « Opérateur vectoriels » vous aidera si vous lisez la partie consacrée à la divergence d'un champ vectoriel… C'est juste une autre question de cours.

Q10 : Il suffit d'utiliser le rappel adapté au texte : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Ainsi, on obtient : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{13}\right)^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2\right) = -1$

Q11 : Aucune difficulté ici : encore de petites questions de cours sur la logique de Boole (revoir les règles de calcul, les lois de De Morgan).

« Chercher » est une partie plus difficile….

Q1 : Seule la dernière ligne de la très longue présentation était utile ici. On veut juste un encadrement de *x* pour avoir *g*(*x*) inférieur à 0,1.

On ne fait que résoudre l'inéquation adaptée à la demande selon :

$$1 - \frac{45\,x}{44\,x+1} \leq 0{,}1 \iff \frac{45\,x}{44\,x+1} \geq 0{,}9 \iff 45\,x \geq \frac{9}{10}(44\,x+1)$$

$$\iff \left(45 - \frac{9}{10}\,44\right)x \geq \frac{9}{10} \iff \frac{54}{10}x \geq \frac{9}{10} \iff x \geq \frac{1}{6} \quad \text{d'où : } x \in \left[\frac{1}{6};1\right].$$

Q2 : Mon document « Indépendance de deux variables » vous permettra de comprendre pourquoi la réponse à cette question est 2. Au passage, vous comprendrez aussi la signification du symbole χ^2 ! (Ceci est une belle publicité pour ce document !)

Q3 : Il suffit de poser $\frac{6}{Z} = 2$ (seule solution réelle de l'équation) pour obtenir $Z = 3$. La question était finalement simple, à condition d'être à l'aise avec les équations complexes…

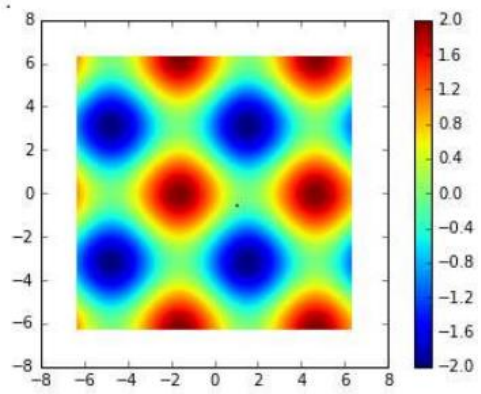
Q4 : On veut donc résoudre 19 x + 13 y = 1000 (*) où x est le nombre d'hommes et y celui des femmes. On nous dit que : $19 \times (-2) + 13 \times (3) = 1$. On peut alors en déduire la relation : $19 \times (-2000) + 13 \times (3000) = 1000$ (**).

(*) – (**) donne : 19 (x + 2000) + 13 (y – 3000) = 0 soit 19 (x + 2000) = 13 (3000 – y)

Les solutions de cette équation sont : $x = 41 + 13\,k$ et $y = 17 - 19\,k$ avec k entier relatif.

Vu le problème posé, on cherche des valeurs x et y positives. Seules les valeurs k allant de –3 à 0 peuvent convenir. Mais seul k = 0 donne x plus grand que y. On répondra donc finalement x = 41 à la question posée.

Q5 : Comment identifier le champ de vecteurs dont la coordonnée du rotationnel sur l'axe z est donnée ci-contre ? Question délicate ! En effet, les graphiques des champs sont difficiles à lire… Il va falloir se contenter des indications données sous forme de petites flèches rouges indiquant le sens de rotation.



Info n°1 : La troisième coordonnée de $\overrightarrow{rot}\,\vec{E}$ se calcule selon $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$ lorsque l'on dispose des expressions de E_x et E_y. On en déduit (malgré le changement de lettre pour le vecteur de départ) que le graphique proposé donne cette troisième coordonnée avec le code couleur : teinte bleue pour une valeur négative ; teinte rouge pour une valeur positive.

Info n°2 : La fonction diff semble venir de numpy (une bibliothèque de fonctions pour la programmation en langage Python). Ici, elle est utilisée pour estimer la troisième coordonnée du rotationnel d'un vecteur $\vec{F} = (F_x; F_y; 0)$ dont on ne connait les valeurs qu'en certains points du plan.

Info n°3 : Le rotationnel est utilisé pour détecter des zones de vortex dans un champ de vecteurs. On peut donc éliminer les solutions B et D qui ne tournent pas beaucoup… Il reste les solutions A, C et E. On nous aide en y signalant le sens de rotation du champ.

Les flèches indiquant le sens de rotation localement sont positionnées en des points centrés sur les coordonnées : (2 ; –2) pour le graphe A ; (–2 ; 0) pour le graphe C ; (–2 ; 4) pour le graphe E.

Je propose d'éliminer le cas E car autour du point $(-2\,;4)$ il semble que l'on soit entre quatre tourbillons d'après le schéma ci-dessus. Donc, le rotationnel devrait y être proche de 0. Or le schéma E propose une flèche indiquant une rotation bien marquée. Ceci semble être contradictoire.

Il reste à étudier les graphes A et C avec soin avant de conclure…

Pour le graphe A, le point (2 ; –2) est dans une zone bleue sur le schéma de départ, on peut tenter de valider cette info en calculant explicitement le rotationnel du champ $\vec{E}$!

On obtient $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = (0\,;0\,;\,-sin(x) + cos(y))$. En utilisant x = 2 et y = –2, la troisième coordonnée vaut donc $-sin(2) + cos(-2) = -sin(2) + cos\,(2)$ qui est négative (l'angle de 2 radians est très proche de $\frac{2\pi}{3}$, cela peut aider pour faire les calculs). Cela semble donc cohérent avec la zone bleue si l'on suppose qu'un champ tournant dans le sens horaire sera teinté de bleu (rappel : le sens de rotation trigonométrique usuel en mathématiques, c'est le sens « positif », il est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, sens « antihoraire »).

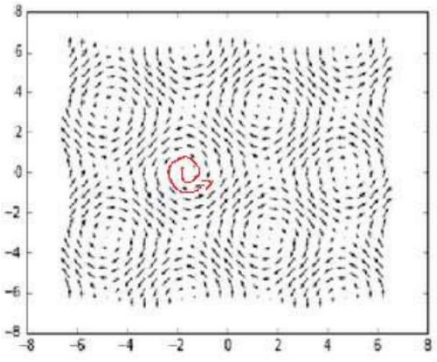
Rappel pour les jeunes lecteurs de ce document : une montre est un appareil indiquant l'heure avec des aiguilles qui tournent…).

Pour le graphe C, le point (–2 ; 0) semble être bien au centre d'une zone rouge sur le schéma de départ, on peut tenter de valider ce choix en calculant à nouveau le rotationnel.

En utilisant x = –2 et y = 0, la troisième coordonnée, sin(2) + 1, est positive. Cela semble cohérent avec la zone rouge si l'on suppose qu'un champ tournant dans le sens antihoraire sera teinté de rouge.

Mais alors, comment choisir ???

Le calcul du champ au point $(0\,;0)$ donne : $\vec{E} = (0\,;1)$. Il faut donc un vecteur vers le haut ! Ceci est visible sur le graphe C en regardant bien (zoomez !) sur le graphe ci-contre :

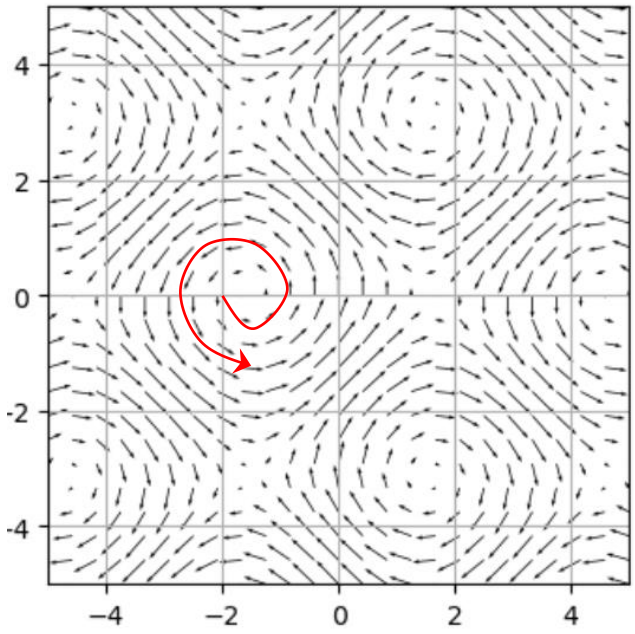


En revanche, sur le graphe A, on peut distinguer une flèche horizontale au centre du repère. On peut donc éliminer ce choix.

Au final, on a perdu pas mal de temps avec l'indication des flèches et tous nos petits calculs……

Pour vérifier tout cela proprement, j'ai tracé avec Python le champ de vecteurs $\vec{E}$.

Voici en plus propre ce que l'on obtient :



Le résultat correspond bien à la figure C.

Q6 : La solution « complète » de l'équation différentielle $y'' + 4y = 6\,sin(6t)$ est à retrouver parmi plusieurs choix.

La solution proposée en C ne comporte pas de solution particulière, elle est donc à rejeter ! Les solutions D et E ont une partie « solution particulière » mais qui dépend de constantes quelconques ! Ceci n'est pas possible, on le sait par expérience…

Les deux dernières propositions ne diffèrent que par la solution particulière, il suffit donc de tester celle qui vérifie bien l'équation (E) : $y'' + 4\,y = 4\,\sin(6\,t)$.

On teste donc dans (E) les fonctions : $f\,(t) = -\frac{1}{8}sin\,(6t)$; $f\,(t) = \frac{1}{16}sin\,(6t)$.

Je crois que la première fonctionne…

Q7 : On considère ici une fonction $F(p) = \frac{p-7}{(p-7)^2+1}$ dont on cherche l'original (cf le cours sur la transformée de Laplace). F est du même type que $\frac{p}{p^2+1}$, liée à l'original cos(t), en considérant $\omega = 1$. Il faut ensuite savoir utiliser le terme de décalage –7.

Pour cela, je rappelle ici une ligne importante des tableaux de transformées. Si la fonction $f(t)u(t)$ a pour transformée $F(p)$, alors, la fonction $e^{-at}\,f(t)\,u(t)$ admet la transformée $F(p+a)$.

En considérant $a = -7$, on obtient l'original cherché selon : $f(t) = e^{7t}cos(t)\,u(t)$.

On élimine le choix C d'office !

Les autres choix seraient aussi à éliminer car la formulation « l'original de la fonction $f(t)$ » est absurde ! On parle en effet de « l'original de la fonction $F(p)$ » !! Passons sur ces erreurs que le relecteur du sujet n'a pas relevé… et poursuivons.

On élimine B car l'exponentielle n'est pas e^{7t}. On élimine aussi E car il n'y pas de division par e^t.

Il reste A et D. La réponse A est la moins pire de toutes pour cette question mal posée…

Q8 : La série de Fourier proposée ci-contre ne comporte que des termes du type $sin\,(\,n\omega t)$ avec n impair.

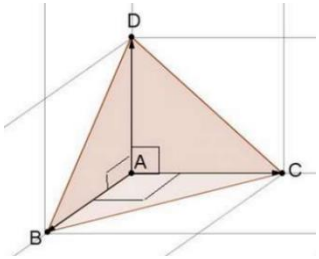
$$s(t) = \Sigma_{p=0}^{+\infty} \frac{4A}{(2p+1)\pi} sin((2p+1)\omega t)$$

On peut donc supposer qu'il n'y aura pas de terme lié à la pulsation 2ω. On prendra donc 0 pour l'amplitude liée à cette harmonique de pulsation 2ω.

Remarque : Il ne faut pas écrire « L'amplitude liée à l'harmonique de pulsation 2ω est donc égale à 0 ! ». En effet, en mathématique , 0 ! vaut 1 ! La factorielle derrière le 0 aurait posé problème…… En revanche, écrire « x = 0 ! » ou bien « x = 1 ! » revient au même !!!

Q9 : Lorsqu'un ensemble contient cinq éléments distincts, le nombre de permutations est égal à 5 ! (attention, le ! est bien ici une factorielle !!). Donc la réponse est 120.

Q10 : On demande la distance AD, représentant la distance du point D au plan (ABC).



Utilisons Pythagore dans les triangles rectangles ABC et ABD. On obtient facilement : $AB^2 + AC^2 = a^2$ et $AB^2 + AD^2 = a^2$. On peut alors en déduire AC = AD. Avec Pythagore dans le triangle ACD, on peut en déduire : $2\,AD^2 = a^2$.

Ainsi, on obtient : $2\,AD^2 = 18$ et finalement : $AD = 3$.

Q11 : Le calcul proposé doit juste être finalisé !!

Vous avez juste à calculer l'intégrale proposée :

$$I = \int_0^a r^4\,dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^a [\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^5}{5}$$

Voilà de quoi vous aider un peu dans votre promenade mouvementée au pays des mathématiques.
La fin de cette « Theory Of Mathematics' Immortal Curves » vous sera proposée ultérieurement…
Un an et demi plus tard (véridique…), voici enfin la suite !!!

Partie « **Modéliser** ».

Q1 : Pas facile de décrypter un algorithme de ce genre…

```
from math import log
def rang(p):

    H = A
    n = 1
    while log(1+B  )>C
        n = n+1
        H = H + D
    u=H-log(n)
    return (E ,n)
```

On nous dit :

Il exploite une série harmonique H définie pour tout entier naturel non nul n, $H_n = \Sigma_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
C'est une fonction Python de paramètre p donnant une valeur approchée de γ à 10^{-p}
On pose $u_n = H_n - ln(n)$
On sait que $0 \leq u_n - \gamma \leq ln(1 + \frac{1}{n})$

H représente la somme partielle des $\frac{1}{k}$. La valeur initiale est donc A = 1.

La boucle while continue tant que $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 10^{-p}$ (la puissance de 10 semble avoir été oubliée). Donc on donne : B = $\frac{1}{n}$ et C = p.

On poursuit le calcul de la somme H en ajoutant : D = $\frac{1}{n}$.

Enfin, on revoit la valeur E = u à la fin de ces calculs.

Q2 : Il faut retrouver la question dont on donne la réponse !

On note A l'évènement « la boule piochée est blanche » et B_i l'évènement « L'urne choisie est la numéro i ».

On a donc : $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$

La probabilité d'obtenir une boule blanche est donc $\frac{1}{2}$

On reconnait les probabilités conditionnelles de tirer une boule blanche sachant que l'on tire dans une urne donnée. On en déduit les informations suivantes :

- L'urne 1 contient 3 boules blanches et 5 rouges (fraction $\frac{3}{8}$).
- L'urne 2 contient 4 boules blanches et 2 rouges (fraction $\frac{4}{6}$).
- L'urne 3 contient 1 boule blanche et 3 rouges (fraction $\frac{1}{4}$).

La réponse A semble évidente…

A - c Trois urnes U_1, U_2, U_3 , contiennent des boules blanches et rouges : U_1 contient 3 blanches et 5 rouges ; U_2 contient 4 blanches et 2 rouges et U_3 contient 1 blanche et 3 rouges. On choisit au hasard une urne et on y pioche une boule. Supposons que les probabilités de choisir U_1, U_2, U_3 sont, respectivement, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Q3 : L et C étant connus, on demande de résoudre l'équation $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$. Délicat…

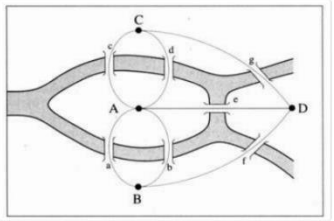
J'obtiens avec peine $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Donc, on répond : $\omega = \frac{1}{\sqrt{8\times0{,}5}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Q4 : Si, pour une histoire de codes, on demande d'additionner les deux valeurs 18 et 19 et de donner le résultat modulo 26, on doit poser :

18 + 19 = 37 = 11 + 26. La réponse est donc 11.

En termes matheux : $18 + 19 = 37 \equiv 11\ [26]$.

Q5 : On doit donner des valeurs d'une matrice d'adjacence à partir d'un graphe…



On demande *a*, *b* et *p*.

Comme aucun sommet n'est relié directement à lui-même par une boucle, on donne : $a = p = 0$.

La matrice d'adjacence du graphe est : $M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$

La valeur de *b* fait partie de la ligne du haut. Mais cette ligne est liée à quel sommet ? Rien n'est dit… On prendra donc la dernière valeur proposée !!

Q6 : Revoyez votre cours d'électricité pour répondre A à la question posée !

En sachant que la tension aux bornes d'une bobine est donnée par $u_L(t) = Li'(t)$.
Établir l'équation d'un circuit composé d'une résistance R en série avec une bobine d'inductance L, l'ensemble alimenté par une source de tension E constante.

A - ○ $Li'(t) + Ri(t) = E$

Q7 : Les intégrales n'apparaissent pas dans la version que j'ai sous les yeux…

Q8 et **Q9** : Petits problèmes là encore !!

Q10 : La réponse dépend de l'endroit où l'on est censé voir un angle de 30° ! Mystère…

Q11 : La réponse A semble parfaitement simple pour l'histoire des interrupteurs !

Vous voici à la fin de cette belle aventure…

J'espère que vous en savez un peu plus qu'au départ !!