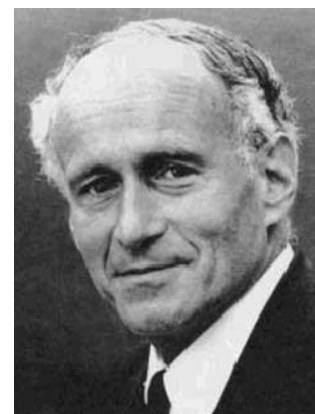


# La théorie des distributions



Cette théorie fondamentale est d'un niveau mathématique élevé. Nous ne ferons ici qu'en aborder les concepts et les résultats les plus utilisés en simplifiant le propos le plus possible.

Néanmoins, cette présentation n'en sera pas simpliste pour autant...

## I L'impulsion

### 1) Introduction

Laurent Schwartz

En physique, certaines situations mettent en jeu la modélisation de phénomènes tels que :

(i) la répartition de la masse de particules ponctuelles (exemple des électrons). Une telle masse est répartie sur un domaine de l'espace extrêmement réduit.

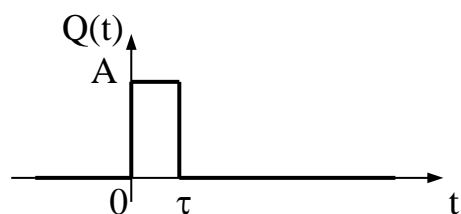
(ii) le choc entre deux corps sur une durée très brève (exemple du choc de particules élémentaires à haute vitesse). On doit alors modéliser l'apport d'énergie correspondant.

### 2) Le modèle du choc

Pour notre propos, nous allons considérer un choc apportant une énergie donnée, que nous prendrons égale à 1 pour simplifier.

On considère pour simplifier que l'énergie est apportée à un taux  $Q(t)$  par seconde. Le produit  $Q(t) dt$  est donc la quantité d'énergie apportée durant une durée élémentaire  $dt$ .

Pour simplifier encore, nous considérons ici le schéma ci-dessous :



On considère donc  $Q(t)$  comme étant constante et égale à  $A$   
 $\tau$  représente la durée du choc

Cette fonction permet de modéliser le choc étudié.

On parle d'impulsion, en lien avec le phénomène physique où une certaine énergie est impulsée.

L'énergie apportée est égale à 1  $\Rightarrow$  l'aire du rectangle vérifie la relation :  $A \cdot \tau = 1$

Pour modéliser des chocs très brefs, on peut prendre des valeurs de  $\tau$  de la forme :

$\tau = \frac{1}{n}$  où  $n$  est un entier de plus en plus grand.

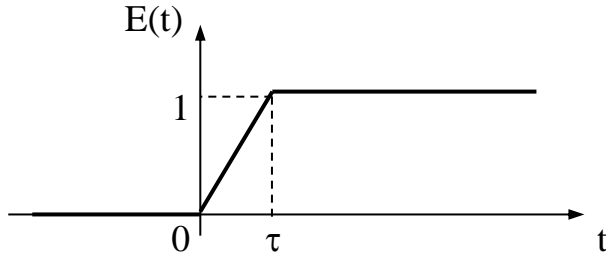
Ainsi, la valeur de  $A$  doit être égale à  $n$ . Finalement,  $A$  doit donc être de plus en plus grand.

**Plus  $\tau$  est petit, plus l'impulsion est brève et donc intense.**

Représentons à présent la quantité d'énergie apportée à un certain instant  $t$ . Lorsque  $t$  est entre 0 et  $\tau$  cette énergie se calcule selon :

$$E(t) = \int_{-\infty}^t Q(s) ds = \int_0^t A ds = A t \quad (\text{s est une variable temporelle muette})$$

Ainsi, on peut représenter cette nouvelle fonction :



Ainsi, toute l'énergie est apportée entre  $t = 0$  et  $t = \tau$

Plus l'énergie est apportée de façon rapide, sur une durée très brève, plus la montée de la courbe est raide.

Remarque :

Certaines situations demandent l'intervention de  $Q(t)$  dans une équation différentielle. On peut donc être amené à en calculer la transformée de Laplace.

Le calcul donne :

$$L [Q(t)] = \int_0^{\infty} Q(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\tau} A e^{-pt} dt = A \left[ \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\tau} = \frac{A}{p} (1 - e^{-p\tau})$$

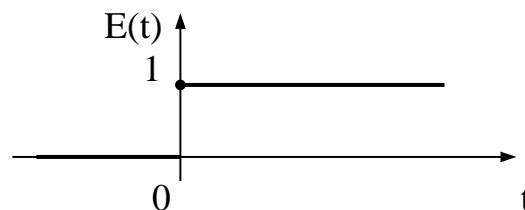
Lorsque l'impulsion est très brève,  $\tau$  est très petit et on peut écrire :  $e^{-p\tau} \approx 1 - p\tau$

D'où :  $L [Q(t)] = A \cdot \tau = 1$

C'est un résultat valable lorsque l'on considère une impulsion infiniment brève.

Revenons à nos fonctions  $Q(t)$  et  $E(t)$ . Regardons ce qui se passe lorsque le temps  $\tau$  tend vers 0.

Pour  $Q(t)$ , la valeur  $A$  tend vers l'infini, la courbe n'est donc plus représentable. En revanche,  $E(t)$  est toujours représentable car à la limite, on obtient une courbe discontinue :



Du point de vue mathématique, la fonction  $Q(t)$  pose le problème suivant : on doit avoir son intégrale qui vaut 1 mais lorsque  $\tau$  tend vers 0, la fonction devient nulle partout, sauf en  $t = 0$  où toute l'énergie est donnée.

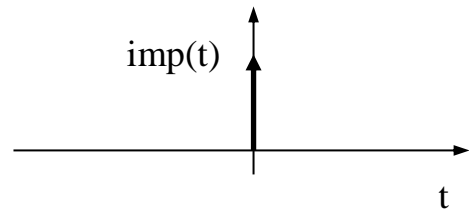
Ainsi, on obtient une fonction nulle presque partout, mais dont l'intégrale vaut toujours 1. C'est une contradiction pour le calcul de l'intégrale, à la fois au sens de Riemann et au sens de Lebesgue.

Ce sont les physiciens qui travaillaient sur les particules élémentaires qui ont posé ce problème au début du XX<sup>ème</sup> siècle. Ce qui a été proposé pour lever la contradiction, notamment par Paul Dirac en 1926, est exposé ci-dessous.

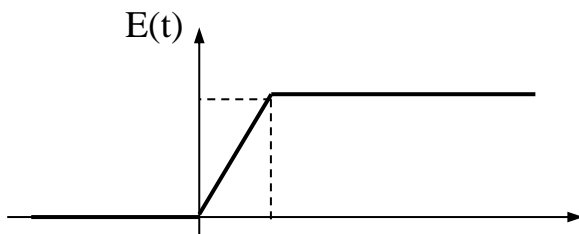
On modélise l'impulsion par une fonction  $\text{imp}(t)$  dont les caractéristiques sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{imp}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \text{imp}(t) dt = 1 \end{array} \right.$$

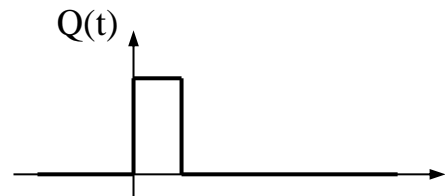
On la représente sous la forme :



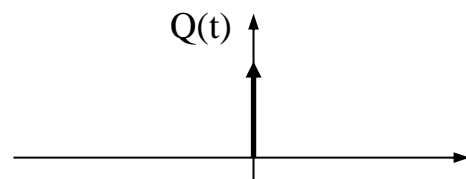
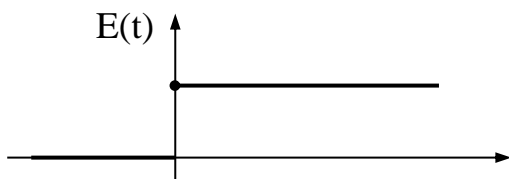
Ce nouveau formalisme implique une nouveauté de taille car on a :



$E(t)$  dont la dérivée est  $Q(t)$



Or, lorsque le temps de l'impulsion tend vers 0, on arrive à :



$E(t)$ , une fonction discontinue en  $t = 0$ , serait malgré tout dérivable. La dérivée est ici une fonction nouvelle appelée impulsion.

Il s'agit donc d'un nouveau formalisme qui entraîne une généralisation de la notion de fonction. Ce travail a été formalisé par Laurent Schwartz en 1946 sous le nom de « théorie des distributions ». Notons que le soviétique Sobolev a également apporté sa contribution à ce formalisme. Avant de présenter cette nouvelle théorie, nous allons voir sur un petit exemple l'intérêt de ce nouveau formalisme.

### 3) Le calcul d'une intégrale

Supposons que l'on doive calculer une intégrale du type :  $I = \int_{\mathbb{R}} \text{imp}(t) f(t) dt$

où  $f$  est une fonction dérivable au sens usuel.

On peut effectuer une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(t) = f(t) & \text{donc } u'(t) = f'(t) \\ v'(t) = \text{imp}(t) & \text{donc } v(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (\text{voir le créneau } E(t) \dots) \end{array}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
 I &= [v(t)f(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} v(t) f'(t) dt \\
 &= f(+\infty) - \int_0^{+\infty} f'(t) dt = f(+\infty) - [f(t)]_0^{+\infty} \\
 &= f(+\infty) - (f(+\infty) - f(0)) = f(0)
 \end{aligned}$$

Finalement, le calcul de l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} \text{imp}(t) f(t) dt$  est possible malgré la présence d'une fonction  $\text{imp}(t)$  bien problématique.

## II Théorie des distributions

### 1) Introduction

En physique, on représente les phénomènes en les modélisant par des fonctions lorsque c'est possible. Par exemple, on peut donner l'expression de la température en tout point d'une barre métallique dont une extrémité A est soumise à la température  $T_A$ . On a dans ce cas :  $T(x) = T_A + \alpha x$

Or, la température en un point ponctuel d'abscisse  $x_0$  n'a pas de sens physique. En effet, la température rend compte de l'agitation moléculaire aux alentours du point considéré.

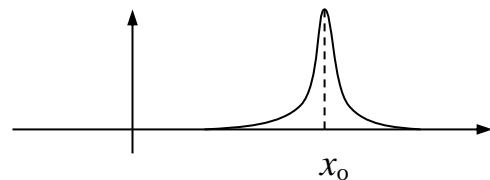
De plus, la mesure d'une température en un point ponctuel donné est impossible car l'utilisation d'un appareil de mesure (ayant une certaine dimension spatiale) entraîne en fait une mesure moyennée dans l'espace.

Finalement, la valeur véritablement accessible par l'expérience au point  $x_0$  est une valeur du type :

$$T(x_0) = \int T(x) g(x) dx$$

où la fonction  $g$  est du type :

dont l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  vaut 1.



La mesure sera d'autant plus précise que le pic est étroit. A la limite, on peut aller jusqu'à une impulsion.

Conclusion :

il est essentiel en physique de travailler avec des expressions du genre  $\int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx$  afin d'obtenir des valeurs moyennes de  $f$  en un certain point  $x_0$ .

Ici,  $g(x)$  est une fonction nulle partout sauf sur un certain intervalle centré en  $x_0$ . Cet intervalle est appelé le support de  $g$ . En dehors du support de  $g$ , la fonction est nulle. Ainsi, le produit  $f g$  est nul en dehors du support de  $g$ .

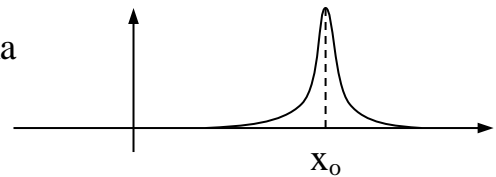
L'intégrale ne prend donc en compte la contribution de  $f$  que localement autour du point  $x_0$ .

## 2) Définition des distributions

### a) Un exemple.

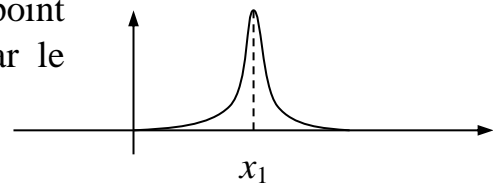
Soit  $f$  une fonction donnant la température théorique en tout point d'une barre métallique.

On pose la fonction  $\varphi_0(x)$  définie par le schéma suivant :



La température mesurée au point  $x_0$  sera calculée selon l'intégrale :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) f(x) dx$

Ensuite, pour obtenir la température en un autre point  $x_1$ , on utilise une autre fonction  $\varphi_1(x)$  définie par le schéma suivant :



Ainsi, la connaissance des différentes valeurs de  $f(x_i)$  en différents points  $x_i$  passe par l'utilisation de différentes fonctions  $\varphi_i(x)$ .

On considère finalement la famille infinie des fonctions  $\varphi_i$  sur laquelle on fait agir  $f$  par l'intermédiaire de l'intégrale. Le fait « d'agir » sur les fonctions  $\varphi_i$  par une opération (l'intégration ici) se formalise en définissant ce qu'on appelle un opérateur.

Ici, on définit l'opérateur  $T_f$  qui agit sur les fonctions  $\varphi_i$  selon :

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$$

Ainsi, on définit l'opérateur  $T_f$  à partir de  $f$ . On dit aussi que l'on identifie la fonction  $f$  à l'opérateur  $T_f$ . On généralise ainsi la notion de fonction par l'utilisation de l'opérateur  $T_f$  qui lui est associée.

### b) Conditions d'existence de $T_f$

La définition  $T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$  pose naturellement le problème de la convergence d'une telle intégrale.

Les fonctions  $\varphi$ , pour que le calcul soit possible, doivent avoir un support borné du type  $[-a ; a]$ . En dehors de ce support, elles sont nulles.

Ainsi, l'existence de  $T_f(\varphi)$  est assurée quelque soit la fonction  $f$  considérée.

### c) La dérivation

La notion de fonction étant généralisée, nous allons faire de même pour la dérivation.

Soit la fonction  $f$  dont l'opérateur associé est  $T_f$  :  $T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$

Si l'on considère  $f'$ , la dérivée de  $f$ , on peut lui associer un opérateur défini par :

$$T_{f'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f'(x) dx$$

Alors, avec une intégration par parties, on obtient :

$$\underline{T_{f'}(\varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) f(x) dx}$$

Ainsi, la fonction  $f'$  n'apparaît plus, il n'est donc pas nécessaire pour cette relation que  $f'$  existe. En revanche, il faut que la fonction  $\varphi$  soit dérivable.

#### d) Définition des distributions

On considère l'ensemble  $D$  des fonctions  $\varphi$  telles que : (i)  $\varphi$  est nulle en dehors de son support borné ; (ii)  $\varphi$  est indéfiniment dérivable au sens usuel sur  $R$ .

On appelle distribution, l'opérateur noté  $T_f$  associé à une fonction  $f$  localement intégrable sur  $R$  (c'est-à-dire intégrable sur tout intervalle du type  $[a ; b]$ ).

Par définition :  $T_f(\varphi) = \int_R \varphi(x) f(x) dx$  On note aussi :  $T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle$

Une distribution est un opérateur linéaire :  $T_f(\varphi + \psi) = T_f(\varphi) + T_f(\psi)$

Une distribution  $T_f$  peut donc être associée à une fonction  $f$  localement intégrable. On fera désormais l'identification entre  $f$  et  $T_f$ .

$$\text{Ainsi, on note : } T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle = \int_R \varphi f$$

En raison de cette identification, on dit que les distributions généralisent les fonctions localement intégrables. Plus généralement, on définit une distribution comme étant une application linéaire et continue de  $D$  dans  $C$  (le corps des complexes).

On appelle distribution régulière une distribution associée à une fonction localement intégrable. Il existe des fonctions qui ne sont pas localement intégrable auxquelles on peut néanmoins associer une distribution. Cette dernière est alors dite non régulière.

Par exemple, on peut considérer l'exemple de l'impulsion qui vérifiait la relation :

$$\int_R \text{imp}(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$$

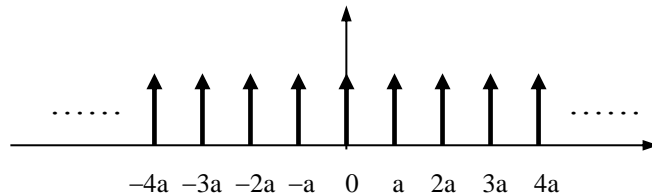
Cette distribution sera notée  $\delta_0$  par la suite. C'est la distribution de Dirac. On définit de même les distributions  $\delta_a$  pour toute valeur de  $a$ . On a ainsi la relation générale :

$$\underline{\delta_a(\varphi) = \varphi(a)}$$

On peut encore définir des distributions périodiques dont le peigne de Dirac est un exemple typique.

Le peigne de Dirac est défini par :  $T(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(na)$

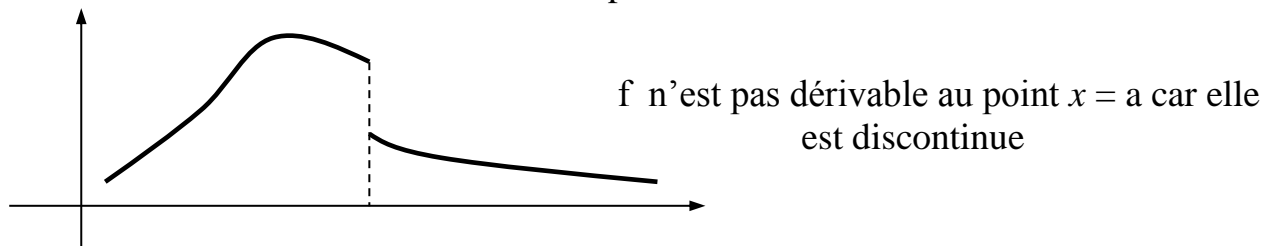
On le représente par :



Cette distribution modélise des impulsions régulièrement espacées.

### e) Dérivée au sens des distributions

Considérons ici une fonction  $f$  continue par morceaux.



On définit encore  $T_{f'}$  par :  $\langle T_{f'}, \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) f(x) dx$

On peut montrer que :  $\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \varphi(a) [f(a^+) - f(a^-)] + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f'(x) dx$

La discontinuité de  $f$  apparaît dans sa dérivée sous forme d'une impulsion ponctuelle  $\delta$  (placée au point  $a$ ) affectée d'un coefficient dépendant de la discontinuité définie par :  $[f(a^+) - f(a^-)]$ .

Ainsi, on peut définir la dérivée d'une fonction (même discontinue) en la considérant comme une distribution. On peut alors travailler avec des fonctions discontinues pour traiter des équations différentielles.

## III Applications au traitement du signal

Le principal intérêt (pour nous) de la théorie des distributions est de donner un cadre formel au traitement des signaux rencontrés dans diverses expériences de physique (signal d'un capteur de température...).

### 1) Transformée de Fourier

Nous allons à présent généraliser la notion de transformée de Fourier aux distributions puisque nous travaillons désormais avec cette notion.

Soit  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\omega x} dx$  la transformée de Fourier d'une fonction  $f$ .

Alors, au sens des distributions :  $\langle F(\omega), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\omega x} dx \right) \varphi(\omega) d\omega$

Ainsi,  $\langle F(\omega), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\omega x} \varphi(\omega) dx d\omega$   
 $= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi(\omega) e^{-2i\pi\omega x} d\omega \right) dx = \langle f, \phi(x) \rangle$

où  $\phi$  est la transformée de Fourier de  $\varphi$

Finalement, on retiendra que pour une distribution  $f$ , on a :  $\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \phi \rangle$

Or l'écriture  $\langle f, \phi \rangle$  a un sens lorsque  $\phi$  répond à certains critères ( $\phi$  à support borné). Comme cela ne peut pas toujours être le cas, on doit restreindre notre étude pour que  $\langle f, \phi \rangle$  ait un sens.

## 2) Distributions tempérées

On appelle distribution tempérée toute distribution définie par une fonction  $f$  dont la croissance est « lente ».

La croissance « lente » est ici caractérisée par : il existe un réel positif  $k$  qui vérifie, lorsque  $x$  tend vers l'infini, la relation  $|f(x)| \leq A|x|^k$

Alors, on a le résultat suivant : Lorsque  $T_f$  est une distribution tempérée, elle admet une transformée de Fourier qui est également une distribution tempérée.

Ces distributions permettent ainsi de généraliser la notion de transformée de Fourier.

## 3) Echantillonnage

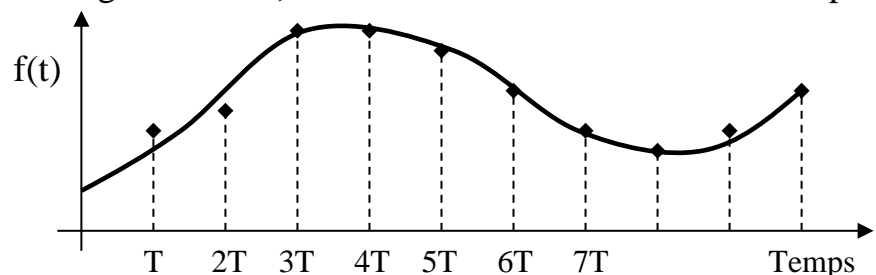
Marquons une pause dans toutes ces considérations théoriques.

On considère ici une expérience **réelle** où l'on mesure un paramètre tel que : tension, température, pression... On mesure ce paramètre car il permet de suivre l'évolution de l'expérience.

Ainsi, on souhaite connaître les variations de notre paramètre pendant toute la durée de l'expérience. On utilise donc un capteur dont la mesure est enregistrée à l'aide d'un ordinateur. Ce passage est effectué grâce à une conversion analogique-numérique.

Le signal issu de l'expérience étant une donnée physique, ses variations sont continues dans le temps. Pour que le signal soit traité par ordinateur, on le convertit en signal numérique discret : au départ, on a une évolution continue... et à l'arrivée, on dispose d'une suite de valeurs entières.

Ces valeurs sont prélevées régulièrement, c'est-à-dire à intervalles de temps réguliers. Pour représenter ce passage du continu au discret, on peut regarder le schéma ci-contre :



« Monsieur, votre schéma n'est pas très bien fait !! Certaines valeurs numérisées sont différentes du signal continu !! » Bien tenté !! Mais...

C'est en fait une réalité physique. En effet, la numérisation entraîne des petites différences entre la valeur réelle et la valeur numérisée (on approche de l'entier le plus près...).



Néanmoins, on suppose qu'il est possible de modéliser le passage du signal continu (courbe pleine) au signal discrétisé (suite des valeurs numérisées) par la relation suivante :

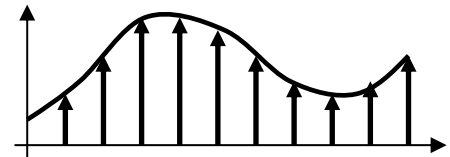
$$f(t) \longrightarrow f_{\text{échan}}(t) = f(t) \delta_T(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nt) \delta(t-nT)$$

C'est le produit de la fonction  $f$  par un peigne de Dirac.

On peut représenter cela sous la forme :

La fonction de départ est ainsi transformée en une distribution.



En pratique, il est évident que la somme n'est pas infinie. Ainsi, partant d'un signal continu, on n'en garde que quelques valeurs. Néanmoins, lorsque la fréquence d'échantillonnage est bien choisie, on ne perd pratiquement pas d'information (sauf lorsque le signal comporte une infinité de fréquence comme c'est le cas pour des signaux chaotiques...).

Finalement, pour une très large classe de signaux expérimentaux temporels, la technique de l'échantillonnage permet de réduire un signal continu à une suite de valeurs sans qu'il y ait trop de perte d'information.

Le signal échantillonné toutes les  $T$  secondes étant connu théoriquement selon  $f_{\text{échan}}$ , on peut en calculer la transformée de Fourier.

Le calcul donne : 
$$F_{\text{échan}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - \frac{n}{T})$$

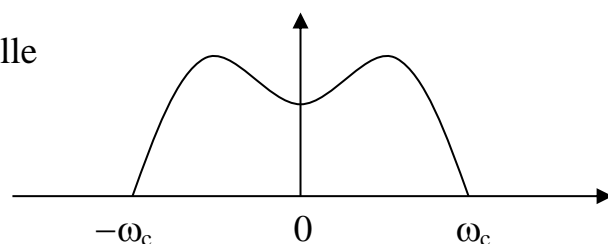
où  $F$  est la transformée de Fourier de la fonction continue  $f(t)$ .

Cette dernière relation se traduit par :

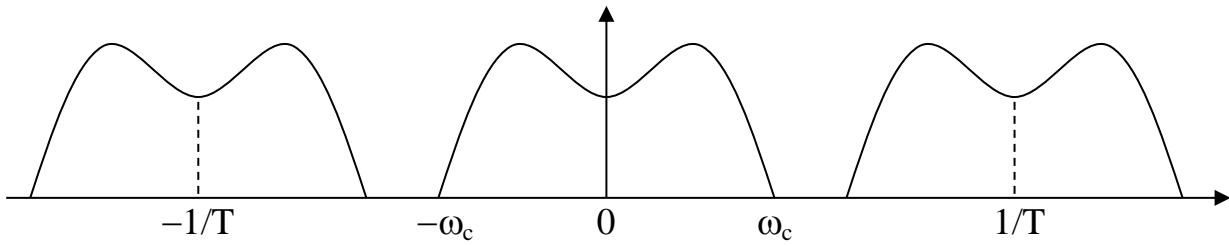
- le spectre du signal échantillonné est un spectre périodique dont le motif de base est le spectre de la fonction de départ  $f$ .
- le motif de base se répète avec une fréquence égale à  $\frac{1}{T}$

Exemple : Soit un signal  $f(t)$  tel que son spectre théorique soit de la forme :

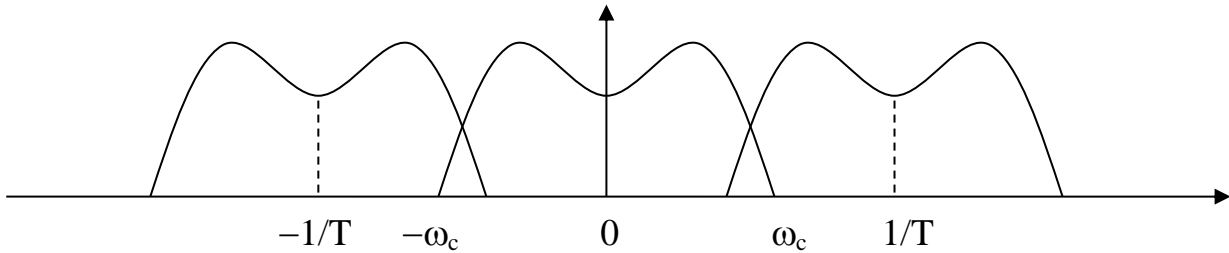
On note  $\omega_c$  la fréquence au-delà de laquelle le spectre  $F(\omega)$  reste identiquement nul.



Alors, on distingue deux cas pour le spectre du signal échantillonné :



Ce premier cas correspond à :  $1/T \geq 2 \omega_c$



Ce second cas correspond à :  $1/T \leq 2 \omega_c$

Ainsi, on constate dans ce dernier cas un chevauchement des motifs de base, ce qui modifie le spectre.

Pour que le spectre d'un signal échantillonné soit de bonne qualité, il faut donc choisir la fréquence d'échantillonnage  $1/T$  au moins deux fois plus grande que la fréquence  $\omega_c$ .

### Remarques

(i) En pratique, on ne connaît pas  $\omega_c$  à l'avance puisque le spectre est calculé après l'échantillonnage... C'est donc au technicien d'apprécier cette valeur en fonction du signal observé (c'est une question d'habitude par rapport à des signaux d'un type donné).

(ii) Par ailleurs, un signal expérimental est toujours perturbé par du bruit à haute fréquence appelé bruit blanc (parasites électriques du 50 Hz, problème de la numérisation...). La fréquence  $\omega_c$  du signal physique est souvent plus faible que celle du bruit. Ainsi, lorsque l'on calcule le spectre, les fréquences dues au bruit se replient vers les basses fréquences. Ceci a pour effet de brouter la courbe du spectre.

(iii) Pour éviter la présence de bruit blanc, on utilise souvent un filtre pour éliminer les hautes fréquences.

(iv) En pratique, les spectres sont calculés avec l'algorithme de la F.F.T. (Fast Fourier Transform). Cela permet de calculer très rapidement le spectre d'un signal discrétisé comprenant  $2^N$  valeurs).

(v) Lorsque l'on utilise une F.F.T., on peut prendre une fréquence d'échantillonnage très rapide pour analyser finement l'aspect du signal temporel sur une courte durée. Mais dans ce cas, le signal ne sera connu que sur une très courte durée, le spectre aura une mauvaise définition et deux pics très voisins pourraient être confondus. D'un autre côté, lorsque la fréquence d'échantillonnage est faible, on

observera le signal sur une longue durée ce qui ne donnera pas de détails sur le signal temporel. En revanche, on a alors accès à l'allure du signal sur une longue durée, le spectre aura une bonne résolution et deux pics très voisins seront bien séparés. On ne peut pas tout avoir en même temps... Il faut donc bien savoir ce que l'on désire analyser avant de choisir la fréquence d'échantillonnage.

#### 4) La transformée en z

Nous allons terminer ce cours avec la présentation d'une technique utilisée en traitement du signal pour les signaux discrétisés. Dans certains cas, on doit calculer la transformée de Laplace ou de Fourier, ou bien encore exprimer la fonction de transfert d'un filtre.

Ces applications ont en commun la technique de la transformée en z. Cette partie en présente le principe.

On note le signal de départ s sous la forme d'une distribution :  $s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta_{nh}$

où  $F_n = F(nh)$  sont les valeurs de la fonction observée aux temps  $t_n = nh$  avec h qui est le pas de discrétisation (la période d'échantillonnage).

On définit alors la transformée en z de s par :  $S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n z^{-n}$

S est donc une série de la variable z.

Remarque : Lorsque l'on calcule la transformée de Fourier de s, on utilise  $z = e^{2i\pi n h T}$ . En revanche, pour une transformée de Laplace, on utilise  $z = e^{pT}$

*Exemple de calcul simple :*

Soit le signal causal s défini par la fonction :  $F(t) = e^{-t}$  pour  $t \geq 0$ .

Alors, on a :  $F_n = e^{-nT}$  pour  $t \geq 0$ .

$$\text{Ainsi : } S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-T})^n (z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{e^T z} \right)^n$$

C'est une série géométrique qui converge à la condition d'avoir le module de la raison inférieur à 1. Cette condition impose :  $|z| > e^{-T}$

$$\text{Sous réserve de cette condition, on a : } S(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{e^T z}} = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

Remarques :

(i) La transformée en z est un opérateur linéaire.

Ainsi, si l'on écrit la transformée en z d'un signal s sous la forme  $Z(s) = S(z)$ , on peut écrire la relation de linéarité :  $Z(a s_1 + b s_2) = a Z(s_1) + b Z(s_2)$ . La linéarité est utilisée lors de l'étude des filtres.

(ii) Il existe par ailleurs des tables donnant les transformées en z de signaux usuels. Ces tables peuvent être aussi utilisées pour la recherche du signal original lorsque la transformée en z est connue.

## *Petits exercices sur les distributions...*

**I** On considère ici des « fonctions test » centrées en  $x = 0$  pour faciliter les calculs. Soulignons que ceci n'enlève rien à la généralité des résultats. En effet, pour travailler en  $x = a$ , un simple changement de variable suffit.

Vérifiez pour les fonctions ci-dessous que leur intégrale sur  $R$  vaut 1 et tracez leur allure.

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\tau^2} + \frac{1}{\tau} & \text{si } x \in [-\tau ; 0] \\ -\frac{x}{\tau^2} + \frac{1}{\tau} & \text{si } x \in [0 ; \tau] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 2) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3)  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  Pour cette fonction, procédons par étapes. Posons  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

a) Soit  $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ . Montrez que :  $J = I^2$

b) Calculez  $J$  en utilisant les coordonnées polaires. En déduire la valeur de  $I$ .

c) Quelle est alors la valeur de  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx$  ?

**II** On considère une barre de métal dans laquelle la température dépend de la position du point considéré selon la formule théorique :  $T(x) = T_0 + \alpha x$

On suppose dans cet exercice que l'appareil de mesure que l'on utilise pour mesurer la température donne une valeur calculée au point d'abscisse 0 selon :

$$T(0) = \int_{-l}^l T(x) g(x) dx \quad g \text{ étant définie au I}$$

1) Calculez  $T(0)$ . Déterminez ensuite sa limite lorsque  $l$  tend vers l'infini.

2) Déterminez la valeur de  $l$  à partir de laquelle l'écart relatif entre la valeur  $T(0)$  et sa limite devient inférieur à 1%.

**III** On considère une barre de métal dans laquelle la température dépend de la position du point considéré selon la formule théorique :  $T(x) = T_0 + \alpha x + \beta x^2$

On suppose dans cet exercice que l'appareil de mesure utilisé pour mesurer la température donne une valeur calculée au point d'abscisse 0 selon :

$$T(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) h(x) dx \quad h \text{ étant définie au I} \quad \text{Calculez } T(0).$$

**IV** (pour les experts...) On considère une barre de métal dans laquelle la température dépend de la position du point considéré selon la formule :  $T(x) = T_0 + \sum_{n=1}^{2N} a_n x^n$

On souhaite calculer  $T(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) h(x) dx$   $h$  étant définie au I

1) Montrez que  $T(0) = T_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{2N} a_n I_n$  où  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$

- 2) On rappelle que  $I_0 = \sqrt{\pi}$ . Calculez  $I_1$ . Calculez ensuite  $I_n$  lorsque  $n = 2p + 1$ .  
 3) Calculez enfin  $I_n$  lorsque  $n = 2p$  (avec  $p \geq 1$ )

On pourra montrer que  $I_{2p} = \frac{2p-1}{2} I_{2p-2}$  puis ensuite :  $I_{2p} = \frac{(2p-1)!}{2^{2p-1} \cdot (p-1)!} \sqrt{\pi}$

4) Finalement, montrez que :  $T(0) = T_0 + \sum_{p=1}^N \frac{(2p-1)!}{2^{2p-1} \cdot (p-1)!} a_{2p}$

**V** (Pour les puristes...) On considère une fonction  $g$  telle que :  $g$  est continue,  $g$  est paire, elle est positive sur  $R$ , son intégrale sur  $R$  vaut 1 et  $\int_0^{+\infty} x g(x) dx$  converge.

Montrez que :  $\int_{-\infty}^{+\infty} (T_0 + \alpha x) g(x) dx = T_0$

**VI** (Pour terminer en douceur...) On considère la fonction  $T(x) = T_0 + \alpha x + \beta x^2$

Calculez  $T(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) f(x) dx$   $f$  étant définie au **I**

Calculez ensuite la limite de  $T(0)$  lorsque  $\tau$  tend vers 0.

## VII Questions de compréhension...

1) Au cours d'une expérience de physique, on mesure l'intensité  $I$  d'un courant électrique. L'expérience dure 10 secondes.

a) Est-il possible de déterminer l'expression théorique exacte de  $I(t)$ , la fonction donnant l'intensité en fonction du temps ? Expliquez votre réponse.

b) On suppose connaître  $I$  pour chaque centième de seconde, et en particulier  $I(5,01)$  et  $I(5,02)$ . Peut-on connaître  $I(5,015)$  ? Si **oui**, comment pourrait-on faire ? Si **non**, expliquez pourquoi.

2) Sur votre lieu de stage, un collègue intéressé par le contenu de votre formation vous demande : a) « C'est quoi une distribution ? » ; b) « En quoi la notion de distribution peut-elle être utile, que permet-elle de comprendre ? »

Que pouvez-vous répondre à ces deux questions ?

## VIII (Pour ceux qui y tiennent vraiment... mais alors vraiment...)

Calculez  $T(a)$  en considérant  $T(x) = T_0 + \alpha x$  et en utilisant les « fonctions test » définies au point  $x = a$  par les relations :

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)}{\tau^2} + \frac{1}{\tau} & \text{si } x \in [a-\tau ; a] \\ \frac{-x+a}{\tau^2} + \frac{1}{\tau} & \text{si } x \in [a ; a+\tau] \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad 2) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x-a} & \text{si } x \leq a \\ \frac{1}{2} e^{-x+a} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

3)  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-a)^2}$