Suites de fonctions

Introduction

Considérons les fonctions : $f(x) = 1$ $g(x) = x$ $h(x) = x^2$ $i(x) = x^3$ $j(x) = x^4$ …….

On pourrait, comme elles sont très semblables, regrouper l'écriture de toutes ces fonctions en une seule et unique formule ! Posons : $f_n(x) = x$ (complétez la formule svp)
On définit ainsi une suite de fonctions avec l'indice entier *n* (allant de 0 jusqu'à l'infini !!).

Le but de ce cours est d'étudier les propriétés de ce type d'objet mathématique.

I Notion de majorant, de maximum, de borne supérieure……

1) Définitions

Soit E, un ensemble de réels u_n.
Exemples : $E_1 = \{ u_n = (-2)^n$, pour tout n entier } ; $E_2 = \{ u_n = \frac{1}{(n+2)}$, pour tout n entier }

Sous réserve d'existence, on définit :

Un *majorant* de E est un réel noté M tel que : pour tout n entier, $u_n \leq M$.
Le *maximum* de E est un réel noté max tel que : max ∈ E et est un majorant de E.
La *borne supérieure* de E, notée sup_E est le plus petit des majorants de E.

De même, toujours sous réserve d'existence, on définit :

Un *minorant* de E est un réel noté m tel que : pour tout n entier, $u_n \geq m$.
Le *minimum* de E est un réel noté min tel que : min ∈ E et est un minorant de E.
La *borne inférieure* de E, notée inf_E est le plus grand des minorants de E.

2) Exemples

* L'ensemble E_1 n'admet ni de majorant, ni de minorant ! En effet, on peut trouver des éléments allant jusqu'à l'infini tant du côté positif que négatif.
* L'ensemble E_2 peut aussi se décrire selon : $E_2 = \{ \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\dots\dots \}$. On remarque alors la présence d'un plus grand élément qui est : max = $\frac{1}{2}$. E_2 est un ensemble majoré par cet élément. On peut aussi dire que cet ensemble admet une borne supérieure $sup_E = \frac{1}{2}$.
De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0$, on peut dire que E_2 est minoré par 0. Mais, 0 n'appartient pas à E_2, donc : E_2 admet 0 pour borne inférieure mais n'admet pas d'élément minimum.

3) Exercice

Déterminer les min, max, sup, inf des ensembles suivants lorsqu'ils existent…

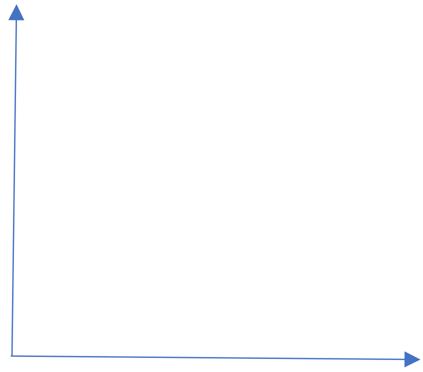
A = $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \geq 1\right\}$; B = $\left\{\frac{(-1)^n}{n+1} + 2,\ n \geq 0\right\}$; C = $\{x^2, pour\ x \in [0;1[\ \}$

II Convergence simple d'une suite de fonctions

1) Un bon exemple et une définition…

Considérons la suite de fonctions définies sur l'intervalle [0 ; 1] selon : $f_n(x) = x^n$

Pour voir mieux les choses, tracez l'allure des fonctions f_n pour n allant de 1 à 4 sur le graphique ci-contre :



On dit que la suite f_n tend vers f sur l'intervalle I lorsque n tend vers l'infini si l'on peut trouver une fonction f telle que : pour tout x fixé dans I, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

Pour notre exemple, vérifiez que la suite f_n tend vers f avec f telle que : $f(x) = 0$ pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1[$ et $f(1) = 1$.

Remarques intéressantes :
* On rappelle qu'une fonction peut être définie « par morceaux » avec des formules différentes. C'est le cas pour notre exemple avec f.
* Pour notre exemple, chaque f_n est une fonction continue, mais la limite f ne l'est pas !
* Il faut bien maîtriser les limites usuelles pour trouver f !!

2) Exercices

Déterminez <u>soigneusement</u> (ceci veut dire : en distinguant les cas selon les valeurs de x) la limite f des suites de fonctions f_n dans les cas suivants :

(i) $f_n(x) = (1 - x)x^n$ sur I = [0 ; 1]

(ii) $f_n(x) = \frac{1+e^x}{1+x^n}$ sur I = R_+

(iii) $f_n(x) = \frac{1+x^n}{1+x^{2n}}$ sur I = R_+

(iv) $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$ sur I = R_+

III Notion de convergence uniforme

1) Définition

Considérons une suite de fonction f_n qui converge simplement sur un intervalle I donné vers la fonction f. Nous allons étudier la fonction représentant l'écart entre f_n et f.

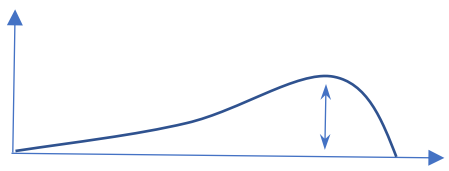
Posons : $\varphi_n(x) = f_n(x) - f(x)$

Ce qui nous intéresse (pour des raisons qui seront plus claires par la suite…), c'est de « mesurer » la borne supérieure de la valeur absolue de cet écart sur l'intervalle I.

On définit donc cette borne supérieure selon : $\|f_n - f\|_\infty = sup_I|\varphi_n(x)|$

Remarque : il faut bien voir que dans les calculs du *sup*, on considère n comme fixé.

Le graphique suivant permet de se faire une idée de la chose dans le cas où on aurait la limite *f* qui serait la fonction nulle.



Définition : on dit que la suite f_n converge *uniformément* vers f lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$

Remarque : $\|f_n - f\|_\infty$ s'appelle la norme infinie de $f_n - f$

2) Etude détaillée d'un exemple :

Soit la suite de fonctions définie par : $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ sur I = [0 ; 1].

Cette suite converge simplement vers *f* définie par : $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ sur]0 ; 1].

Posons, pour n fixé : $\varphi_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{nx}{1+nx} - 1 = \frac{-1}{1+nx}$ sur l'intervalle]0 ;1].
Comme l'écart est toujours nul en $x = 0$, ce cas est laissé de côté !

Il nous faut chercher : $sup_I|\varphi_n(x)| = sup_{]0;1]} \frac{1}{1+nx}$ (on a bien pris la valeur absolue)

La fonction définie par : $|\varphi_n(x)| = \frac{1}{1+nx}$ est facile à dériver et l'on trouve qu'elle est décroissante. Ainsi, on peut obtenir : $sup_{]0;1]} \frac{1}{1+nx} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+nx} = 1$
Finalement, pour cette suite de fonctions, on trouve que pour tout n : $\|f_n - f\|_\infty = 1$

Il est donc impossible d'avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$. Il n'y a pas de convergence uniforme.

Remarque : avec un peu de flair et d'habitude, il est possible de s'éviter tous ces calculs en remarquant la chose suivante…
Soit n fixé. On peut calculer $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Ce calcul montre qu'en $x = \frac{1}{n}$, l'écart entre f_n et f ne peut tendre vers 0, ce qui empêche la convergence uniforme.
Cette astuce est classique… si on ne la voit pas, ou si la suite de fonction ne permet pas de la mettre en œuvre, il faut étudier la fonction représentant l'écart comme dans l'exemple…

3) Modification de l'intervalle d'étude

Dans notre exemple du 2), il n'y a pas convergence uniforme sur [0 ;1]. Mais, si l'on étudie la même suite de fonctions sur un intervalle du type [a ;1] avec a tel que $0 < a < 1$.
Dans ce cas, les fonctions $|\varphi_n(x)|$ étant strictement décroissantes sur [a ;1], on peut dire que : $sup_{[a;1]} \frac{1}{1+nx} = \frac{1}{1+na}$
Ainsi : $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{1+na}$ qui tend bien vers 0 lorsque l'indice n tend vers l'infini.
La suite de fonctions converge bien uniformément vers *f* sur tout intervalle du type [a ;1].

Conclusion : si la convergence uniforme n'est pas possible sur l'intervalle de départ en raison d'une des bornes près de laquelle un problème se pose, on modifie l'intervalle.

4) Exercices

Etudiez la convergence simple puis la convergence uniforme sur les intervalles proposés. Si besoin, étudiez la convergence uniforme sur un intervalle modifié.

(i) $f_n(x) = x^n$ sur [0 ; 1] (ii) $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur [0 ; 1]

(iii) $f_n(x) = n\,x^n(1-x)$ sur [0 ; 1] (iv) (iv) $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$ sur I = R_+

IV Application au calcul intégral

1) Un exemple

Soit $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n e^x dx$. Déterminez une relation (*) entre I_n et $I_{n\text{-}1}$.

Cette relation (*) est fort intéressante, mais elle ne donne pas de formule explicite de I_n. Par ailleurs, on ne pourra pas déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers l'infini. Or, le mathématicien est passionné par ce genre de problème : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ = ??

Remarque pour les experts :
Parfois, certaines situations permettent d'obtenir la limite cherchée. Imaginons par exemple une relation (*) du type : $I_n = \frac{1}{2^n}\sqrt{e} - n\,I_{n-1}$.
Supposons que la limite de I_n soit finie, égale à r avec r strictement positif (ex : r = 0,23). Alors, la relation (*) poserait problème puisqu'à gauche la limite serait r et dans le même temps, la limite à droite serait $-\infty$. Cette contradiction donne le seul résultat possible : 0.

2) Utilité de la convergence uniforme

Considérons (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur un intervalle $[a\,;b]$. On suppose ici que toutes les fonctions discutées sont continues.
Nous allons démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Posons $D_n = \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$ et montrons que cette différence tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (autre façon d'exprimer la ligne mathématique précédente…).

En utilisant successivement la linéarité de l'intégrale, la positivité de l'intégrale et enfin la convergence uniforme de la suite (f_n), on peut écrire :

$$|D_n| = \left|\int_a^b f_n(x) - f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \le \int_a^b \|f_n - f\|_\infty\,dx$$

Ainsi : $|D_n| \le (b-a)\|f_n - f\|_\infty$ et on obtient bien par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = 0$

Théorème :
Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f continue, tout ceci, sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$

Exemple :
Sur $[0\ ;\ \frac{1}{2}]$, on considère la suite de fonctions définies par $f_n(x) = x^n e^x$.
Pour travailler un peu (il n'y a que moi qui bosse dans ce cours ou quoi ??), montrez que cette suite de fonctions converge uniformément vers $f = 0$.
Alors, d'après le théorème ci-dessus : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n e^x\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 0\, dx = 0$
On est donc en mesure de calculer la limite d'intégrales pas si faciles à calculer *a priori*…

Remarque :
On peut dans ce cas utiliser une autre ruse classique : la majoration.
On a sur $[0\ ;\ \frac{1}{2}]$: $0 \le e^x \le e^{\frac{1}{2}}$ puisque la fonction exponentielle est croissante.
Ainsi : $\left|\int_0^{\frac{1}{2}} x^n e^x\, dx\right| \le \left|\int_0^{\frac{1}{2}} x^n e^{\frac{1}{2}}\, dx\right| \le \left|e^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\, dx\right| = \sqrt{e}\,\frac{1}{n+1}$ ce qui donnera la limite…

Exercices :

1) Déterminez les limites suivantes en utilisant le théorème précédent.

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^x}{1+x^n}\, dx$ ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^2 \frac{e^{-nx}}{nx+2}\, dx$

2) On considère la suite de fonctions définies selon le schéma :

Démontrez que cette suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $[0\ ;\ 1]$ en raisonnant par l'absurde.

<u>Problème P1</u>

Soit la suite de fonctions définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

a) Calculez $I_n = \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx$ et en déduire la limite de I_n lorsque n tend vers l'infini.

b) Déterminez la limite simple f de la suite (f_n). Calculez alors : $\int_0^1 f(x) dx$.

c) Au vu des résultats précédents, que serait-on tenté de conclure quant à la convergence uniforme de la suite (f_n) ?

d) Calculez $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ et conclure.

Problème P2

On considère $I_n = \int_0^1 n\, x^2 e^{-nx} dx$

1) Calculez I_n en utilisant la technique de l'intégration par parties. Déterminez alors la limite de cette intégrale lorsque n tend vers l'infini.

2) On note (f_n) la suite de fonctions définies sur [0 ; 1] selon : $f_n(x) = n\, x^2 e^{-nx}$

a) Montrez que cette suite converge simplement vers f que vous expliciterez.

b) Calculez la dérivée de f_n puis en déduire $\| f_n - f \|_\infty$. En déduire si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur [0 ; 1].

c) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

3) Calculez $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$ par la méthode de votre choix pour : $J_n = \int_0^1 n\, x^{10} e^{-nx} dx$

Pour le plaisir de voir des choses affreuses… démontrons le théorème suivant :

Théorème :

Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur un intervalle I vers une fonction f. Alors, f est continue sur I.

Conseils pour la démo :

- cherchez comment on caractérise la continuité d'une fonction
- utilisez l'astuce : $f(a+h) - f(a) = f(a+h) - f_n(a+h) + f_n(a+h) - f(a) + f_n(a) - f_n(a)$