Combien vaut cos(36°) ?

Bah… j'en sais rien moi !

C'est quoi cette question…

François, un collègue de travail, par ailleurs chanteur amateur tout à fait étonnant (écoutez par exemple « Respirer » avec son groupe Morrigan sur You Tube !), me demande sans détour ce matin : **« Tu sais combien vaut le cosinus de trente-six degrés ? »**.

Il s'imaginait probablement, en tant que « prof » de maths, que je connaissais par cœur le cosinus de tous les angles de 0 à 90°… Sa déception fut immense lorsque ma réponse sortit : **« Euh… entre –1 et 1 ? »** (entre nous, vue l'infinitude des réels entre $-\infty$ et $+\infty$, ma réponse n'était pas si mauvaise…C'est vrai ou pas ? Hein ? Bon…).

Il m'annonce alors : **« $\cos(36°) = \frac{phi}{2}$ »**. Je lui demande « C'est quoi « *phi* » ? »

Là, par bonheur, il était assis….

Remarque pour les incultes : *phi* = φ est le fameux nombre d'or ! *Tout le monde* le connait… Vous pourrez trouver sur le net *quelques* infos sur ce nombre très particulier… Ici, je rappelle : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

J'ai préparé cette fiche en guise d'excuses pour mon *abyssale* ignorance et un peu pour le rassurer sur mes compétences en mathématiques… Et vous aussi, vous pourriez apprendre des choses dans ce qui suit !!

Bon, je suis retourné à mon bureau et je me suis demandé comment on pouvait bien prouver l'affirmation concernant ce cosinus spécial (j'avais toute confiance en cette égalité car lui, il ne raconte pas n'importe quoi…).

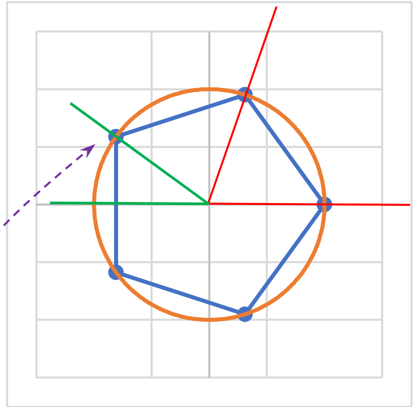
Comment prouver $\cos(36°) = \frac{phi}{2}$??? **Suivez le guide ! !**

1) Déterminons 36° en radian.

Si vous avez trouvé $\frac{\pi}{5}$, c'est bien. En effet, un tour de 360° fait 2π. Il reste juste à diviser le tout par 10 et c'est gagné !

2) Où peut-on voir cet angle dans une figure connue ? me suis-je demandé………

Une idée m'est venue : traçons un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1, pour voir un peu…
Pour info, un vrai mathématicien (ce que je ne suis pas, si l'on en croit ma réponse de tout à l'heure !) voit tout de suite une figure du genre ci-contre :



Bon, voilà une bonne chose de faite me suis-je dis…

Vous voyez où on peut voir un angle de 36° ?

Comme l'angle rouge vaut un tour divisé par cinq = 72°. Sa moitié fait donc 36° !

En fait, 36° est présent dix fois dans cette figure ! Par exemple, l'angle vert ! On peut le montrer facilement du fait de la symétrie de la figure par rapport à l'axe des abscisses (l'axe du repère qui est horizontal si je me rappelle bien… Pour info, le centre du repère est au centre du cercle).

Vous vous dites peut-être à cette étape : « On a bien progressé…. On sait que l'on peut voir dix angles de 36° en faisant le tour d'un cercle… Eh ben à ce rythme, on est pas prêt de trouver la relation cherchée !!! »

Pas de panique…. On y va, on y va…..

Astuce : lorsque l'on résout l'équation complexe $z^5 = 1$, on obtient cinq solutions qui sont justement les points formant notre pentagone ! Coup de chance…..

Il me suffit donc de trouver la valeur exacte des coordonnées de ce point pour avoir la valeur du cosinus de 36° !! Oui… d'accord, il faudra prendre la valeur absolue de son abscisse et justifier ce qui vient d'être dit avec un petit effet de symétrie par rapport à (O*y*)…

Là….. je vous sens un peu rassurés… On va y arriver !

3) On pose $z = X + i\,Y$ l'affixe complexe de notre point.

Justifiez $z^5 = 1$ puis montrez que $z^5 = 1$ donne : $\begin{cases} X^5 - 10X^3Y^2 + 5XY^4 = 1 \\ 5X^4Y - 10X^2Y^3 + Y^5 = 0 \end{cases}$

Justifiez $Y^2 = 1 - X^2$ puis en déduire que X vérifie $16X^4 - 12X^2 + 1 = 0$ en utilisant la deuxième ligne du système.

4) Déterminez les valeurs possibles pour le X^2 lié à notre point, puis justifiez que seule la valeur $\frac{3+\sqrt{5}}{8}$ (*) convient. Pour finir en beauté, vous pourrez vérifier que le carré de la moitié de *phi* est bien égale à (*). Je vous laisse conclure….

Et voilà, on vient de prouver la relation de la page précédente…… Bonne soirée !!