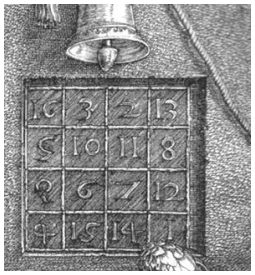
Petits exercices de réflexion sur la diagonalisation



I Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ définie avec des réels non nuls *a*, *b* et *c*. Etudiez la possibilité que la valeur propre $\lambda = a+b+c$ ait un sous-espace propre associé de dimension égale à 2.

II La matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

III Soient *a*, *b*, *c* et *d* des réels distincts de $\mathbb{R}_+^*$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} a & d & b & c \\ c & b & d & a \\ d & a & c & b \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$.

On suppose dans cet exercice que : « La matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. ».

On cherche toutes les matrices formées à partir des coefficients de A mais qui elles, seraient diagonalisables dans $\mathbb{R}$ de façon *certaine* en respectant les règles du jeu suivantes :

- aucun calcul ne peut être mené (si !).
- une justification soignée doit être donnée.
- la première ligne doit être identique à celle de A.
- les coefficients des autres lignes peuvent seulement être déplacés au sein de leur propre ligne.

Bon courage pour ces excellents exercices de réflexion…

La façon d'arranger des chiffres dans un tableau de manière à obtenir des propriétés remarquables n'est pas récent… Par exemple, le carré magique Luo shu comportant les chiffres de 1 à 9 daterait du II^{e} siècle avant notre ère !

L'image ci-contre représente une gravure célèbre d'Albrecht Dürer « Melencolia » datée de 1514. On peut y trouver le carré magique agrandi en haut de cette page (on retrouve d'ailleurs les chiffres 15 et 14 sur la ligne du bas du carré !).