Quelques polynômes, une pincée de dérivation, un peu de calcul intégral et un zest de produit scalaire…

I Recette de M. Legendre

Le polynôme de Legendre de degré n est défini par :

$\mathscr{L}_n(x) = \dfrac{1}{2^n\, n!}\,\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}\left((x^2-1)^n\right)$ où $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ par rapport à x.

1) Montrez que $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sont respectivement : 1 ; x ; $\dfrac{1}{2}(3\,x^2-1)$.

2) Ici, le produit scalaire entre les polynômes P et Q est : $< P, Q > = \int_{-1}^{1} P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x$

Calculez : $< \mathscr{L}_0, \mathscr{L}_1 >$; $< \mathscr{L}_0, \mathscr{L}_2 >$; $< \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2 >$. Conclusion ?

II Recette de M. Laguerre

Le polynôme de Laguerre de degré n est défini par : $\mathrm{L}_n(x) = e^x\,\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}\left(x^n\,e^{-x}\right)$

1) Montrez que L_0, L_1 et L_2 sont respectivement : 1 ; $-x+1$; $x^2-4\,x+2$.

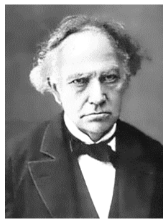
2) Pour la suite, il peut être utile de calculer $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} x^n\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \{\,0\,;1\,;2\,;3\,\}$.

Pour gagner du temps, montrez que $\mathrm{I}_n = n\,\mathrm{I}_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Alors, après avoir calculé I_0, vous obtiendrez facilement I_1, I_2 et I_3.

3) Ici, le produit scalaire entre les polynômes P et Q est : $< P, Q > = \int_0^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Calculez : $< \mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1 >$; $< \mathrm{L}_0, \mathrm{L}_2 >$; $< \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2 >$. Conclusion ?

III Recette de M. Hermite



Le polynôme de Hermite de degré n est défini par : $\mathrm{H}_n(x) = (-1)^n\,e^{x^2}\,\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}\left(e^{-x^2}\right)$

1) Montrez que H_0, H_1 et H_2 sont respectivement : 1 ; $2\,x$; $4\,x^2-2$.

2) Pour la suite, je vous rappelle : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$

Calculez : $< \mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1 >$; $< \mathrm{H}_0, \mathrm{H}_2 >$; $< \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2 >$ où $< P, Q > = \int_{\mathbb{R}} P(x)\,Q(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Conclusion ?

Devinettes :

* pour $n = 2$, quel polynôme est-il solution de l'équation : $y'' - 2\,x\,y' + 2\,n\,y = 0$?
  Est-ce $\mathscr{L}_2$, L_2 ou bien H_2 ??
* L'équation $x\,y'' + (1-x)\,y' + n\,y = 0$ est liée à un polynôme. Lequel ? $\mathscr{L}_n$; L_n ; H_n ??

Remarque

On rencontre certains de ces polynômes en travaillant sur des équations différentielles liées à la conduction de la chaleur ou à l'étude des orbitales de l'atome d'hydrogène.