

Opérateurs vectoriels

En physique, certains calculs typiques reviennent très souvent sous une même forme. D'où l'idée de certaines notations pour alléger la présentation de ces calculs. C'est un peu comme si l'on adoptait la notation suivante : « lunettes » = dispositif formé de lentilles et de branches destinées à maintenir ces lentilles devant les yeux de l'utilisateur pour améliorer sa vision. Avouons que c'est plus court d'écrire « lunettes » !

Les « opérateurs vectoriels » sont donc des notations très pratiques pour faciliter la présentation des calculs et qui sont très souvent utilisées dans tous les cours de physique : électrostatique ; mécanique des fluides ; thermique...

Juste un petit mot sur « Opérateur vectoriel » comprenant deux mots :

* Pourquoi « Opérateur » ?

C'est un objet mathématique qui effectue un calcul sur une fonction ou sur un autre objet mathématique. Il opère un calcul. Exemple bien connu : la dérivation. On peut dire que c'est un « opérateur » qui calcule la dérivée d'une fonction.

* Pourquoi « vectoriel » ?

Un opérateur vectoriel est un outil mathématique qui travaille avec des vecteurs !

Nous allons présenter ici trois opérateurs classiques : le gradient, le rotationnel et la divergence ainsi que certaines de leurs propriétés. Mais pour commencer, je propose un petit rappel sur la notion de fonction de plusieurs variables car elle est au cœur du problème...

Pour terminer cette introduction, il faut citer Gibbs, Heaviside et Maxwell qui ont largement contribué à la mise en place de certains opérateurs vectoriels. Maxwell (1831-1879) est l'un des plus célèbres physiciens car il a proposé en 1865 des équations pour décrire les ondes électromagnétiques et donc en particulier la lumière !



I Fonctions de plusieurs variables

En physique, les phénomènes sont complexes et dépendent de plusieurs quantités. Par exemple, la résistance R d'un fil est donnée par : $R = \frac{\rho \ell}{s}$. R dépend de la résistivité du matériau, de la longueur du fil et enfin de la section de ce fil.

Ainsi : $R = f(\rho, \ell, s)$ est une fonction de trois variables.

On est donc amené à travailler avec des fonctions de plusieurs variables car la réalité physique l'exige ! Pour ne pas discuter à chaque fois du contexte physique dans lequel on travaille, on posera nos fonctions $f(x, y)$ ou $f(x, y, z)$ sans préciser ce qui se trouve derrière x, y ou encore z .

Exemples : $f(x, y) = 5x^3 + xy^2$ ou encore $g(x, y) = x^2e^{x+y^3}$

Lorsque le physicien étudie un phénomène, il doit analyser les différences de comportement d'un point à un autre, ce qui nécessite l'utilisation de dérivées. D'où la question :

Comment dériver une fonction $f(x, y)$?

Pour préciser la variable par rapport à laquelle on effectue la dérivée, on doit abandonner la notation f' qui n'est pas adaptée car il n'y a plus une variable unique !

Dérivation de f par rapport à x : $\frac{\partial f}{\partial x}$.

On dit dans sa tête « d rond f sur d rond x ». En effet, le ∂ est une sorte de « d » arrondi !

De même, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est la dérivée de f par rapport à y . C'est : « d rond f sur d rond y ».

En pratique, pour dériver f par rapport à x , il suffit de faire une dérivée comme d'habitude, en considérant les autres variables comme de simples constantes.

Exemples avec nos fonctions f et g proposées ci-dessus :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 15x^2 + y^2 \quad \text{et aussi} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \quad (\text{vérifiez par vous-même SVP !!})$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xe^{x+y^3} + x^2e^{x+y^3} = (2x + x^2)e^{x+y^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 3y^2 e^{x+y^3} = 3x^2 y^2 e^{x+y^3}$$

Conseil : révisez vos formules de dérivées usuelles avant d'aller plus loin !!!!

Si jamais on vous demande de dériver deux fois de suite par rapport à la variable x , vous devrez noter : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Lire « d rond au carré f sur d rond x au carré ». Pour notre exemple, on trouve : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 30x$

La dérivée seconde par rapport à y est : $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Pour notre exemple : $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$

Exercice : vérifiez les résultats suivants pour notre fonction g : $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = (x^2 + 4x + 2)e^{x+y^3}$

et de même avec $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 3x^2(3y^4 + 2y)e^{x+y^3}$ (résultats sous forme factorisée)

Si tout va bien, vous pouvez tourner la page...

Comme on a deux variables, on peut dériver par rapport à l'une puis à l'autre !

La dérivée de f par rapport à x puis par rapport à y se note : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (notez que le ∂y se retrouve à gauche du ∂x). (lire « d rond au carré f sur d rond y d rond x »)

Remarque : on peut noter $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ pour mieux comprendre la manœuvre.

De même, la dérivée de f par rapport à y puis par rapport à x se note : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (notez que le ∂x se retrouve à gauche du ∂y).

Exemple : on avait trouvé $\frac{\partial f}{\partial x} = 15x^2 + y^2$. Alors : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y$

c'est qui lui ??

Remarque fort intéressante : Un théorème de Hermann Schwarz dit que dans la plupart des cas (et nous resterons dans ce cadre...), les dérivées partielles croisées sont égales !

Autrement dit : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ au final, peu importe l'ordre de l'écriture...



Merci M. Schwarz.

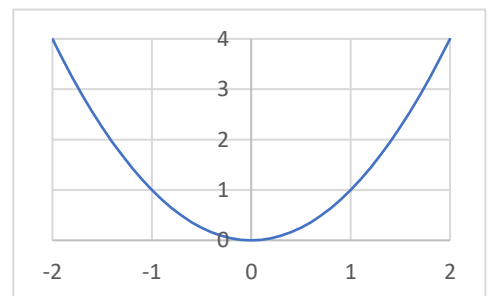
Exercice sympa : vérifiez avec soin l'égalité de M. Schwarz pour nos fonctions f et g .

Avant d'attaquer les fameux « opérateurs vectoriels », il serait intéressant de comprendre **comment on peut représenter graphiquement une fonction $f(x,y)$** .

Cela pourrait s'avérer bien utile pour la suite...

Vous savez qu'une fonction $f(x)$ (donc avec une seule variable) se représente sur un graphique avec deux axes. L'axe des x est utile pour la variable x et on met la valeur de $f(x)$ sur un autre axe (l'axe des y).

Ci-contre, la fonction $f(x) = x^2$ sur $[-2 ; 2]$



Pour une fonction définie avec deux variables, il nous faut un troisième axe pour représenter les valeurs de $f(x,y)$. Cela change beaucoup de choses...

En particulier, la « courbe » de la fonction $f(x,y)$ n'est plus une ligne, mais devient une surface ! Pour représenter une telle fonction, il vaut mieux s'aider d'un logiciel type Excel pour faire les calculs et s'occuper de la représentation 3D. Voyons ceci sur la page suivante...

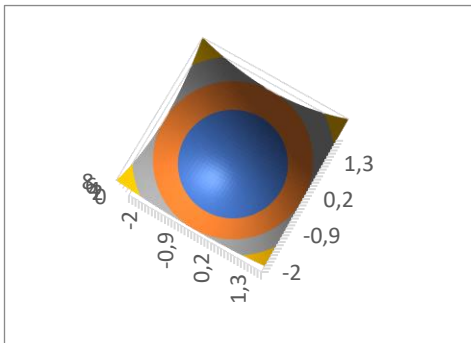
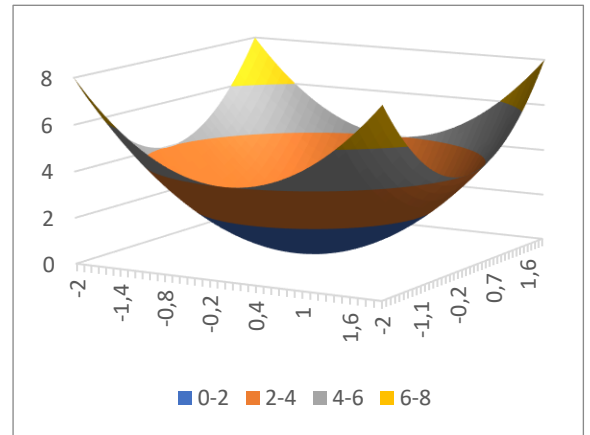
Exemple :

La fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ représentée sur $[-2 ; 2] \times [-2 ; 2]$

(on utilise x entre -2 et 2 et de même pour y).

Le résultat est une sorte de cuvette posée au sol.

Les couleurs servent à visualiser les différentes valeurs de f (en bleu, les plus faibles vont de 0 jusqu'à 2, en orange pour aller de 2 à 4 etc...)

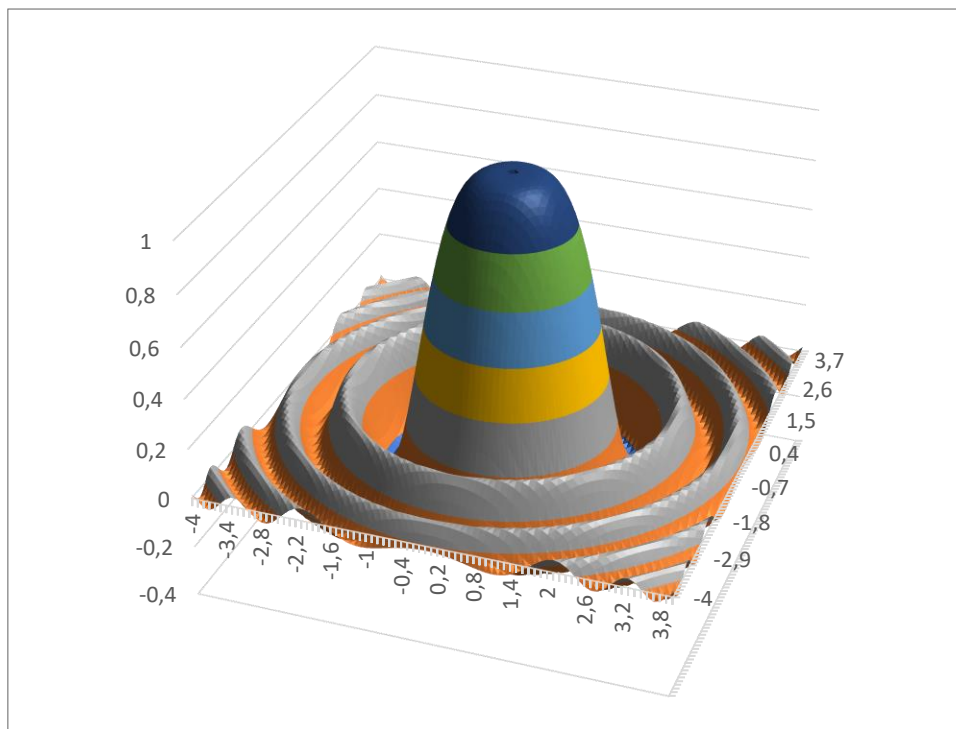


Ces dégradés de couleur, si on les observe du haut (avec un drone...) font apparaître des cercles. En effet, pour cette fonction, si l'on cherche les points tels que f soit égale exactement à 2 (par exemple), on doit résoudre la relation :

$$f(x, y) = 2. \text{ C'est-à-dire : } x^2 + y^2 = 2$$

Vous reconnaissez un cercle centré à l'origine du repère et de rayon égal à $\sqrt{2}$. Il marque le passage de la zone bleue à la zone orange.

D'autres fonctions donnent d'autres résultats ! L'exemple ci-dessous est lié à la fonction définie par : $f(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$. Ne dirait-on pas un chapeau mexicain (un peu gondolé...) ?



Bon, après cette présentation des fonctions de plusieurs variables, nous allons entrer dans le cœur du problème des opérateurs vectoriels.....

II Le gradient

Considérons une fonction $f(x, y)$. On sait maintenant que l'on peut représenter une telle fonction par une surface dans un espace tri-dimensionnel. Nous avons remarqué des hauteurs et des creux sur cette surface, des pentes plus ou moins fortes sont visibles...

Lorsque f est une fonction liée à la température d'une plaque plane par exemple, on peut alors analyser les zones de plus fortes températures, ou bien étudier les zones de plus fortes variations de température (où la pente de la surface est très forte).

Pour analyser les variations de f , qui peut aussi être appelé « champ scalaire » (zone du plan où est définie une grandeur f en chaque point), on utilise la notion de gradient.

On pose : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$ (calcul assez simple au final)

Le gradient est un vecteur dont la direction indique la plus forte pente sur la surface de f .

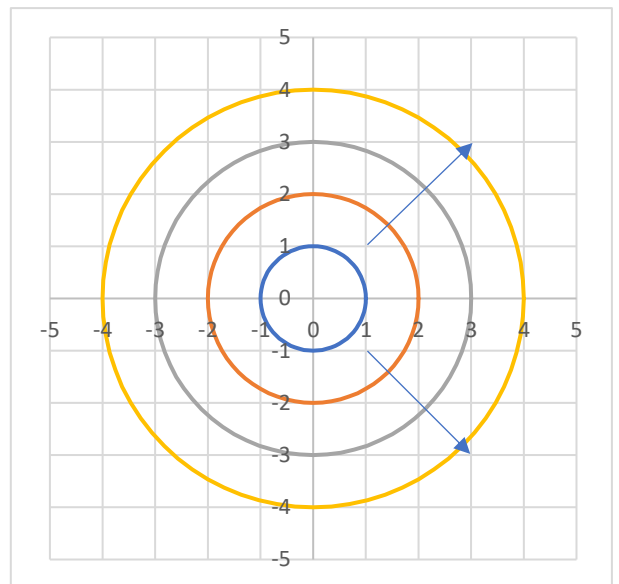
Exemple :

Pour $f(x, y) = x^2 + y^2$ on obtient un gradient égal à : $\overrightarrow{\text{grad}} f = 2x \vec{i} + 2y \vec{j}$

Au point (1 ; 1), le gradient est $2 \vec{i} + 2 \vec{j}$

Au point (1 ; -1), le gradient est : $2 \vec{i} - 2 \vec{j}$

Si l'on voit f comme l'altitude en tout point de cette surface, on peut tracer des lignes (ici des cercles) d'égales altitudes (courbes de niveaux des cartes de randonnées) et constater que le vecteur gradient montre bien la direction où la pente est la plus forte car ces directions vont rencontrer rapidement des lignes de niveaux plus hautes.



Remarques :

- * les gradients sont orthogonaux aux lignes d'égales valeurs de f (les courbes de niveaux).
- * on entend souvent dans la bouche des physiciens spécialisés dans les températures : « Sur cette direction, il y a un fort gradient de température ».

* la formule pour $f(x, y, z)$ est : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

* on peut noter le gradient en utilisant un autre opérateur : Nabla $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$.

On écrit alors : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$ (c'est une notation à connaître)

III Le rotationnel

1) Notion de champ vectoriel

Lorsque vous lirez : « Considérons un champ de vecteurs... », vous devrez comprendre « On travaille avec une fonction vectorielle donnant l'expression d'un vecteur en tout point du plan ou de l'espace ».

Exemple détaillé :

Soit le champ de vecteurs défini par $\vec{V}(x, y) = -y \vec{i} + x \vec{j}$. On peut représenter quelques vecteurs de ce champ sur un graphe pour mieux cerner ce que représente une telle formule.

Le vecteur $\vec{V}$ en un point M de coordonnées $(x_M; y_M)$ est donc $\vec{V}_M = -y_M \vec{i} + x_M \vec{j}$

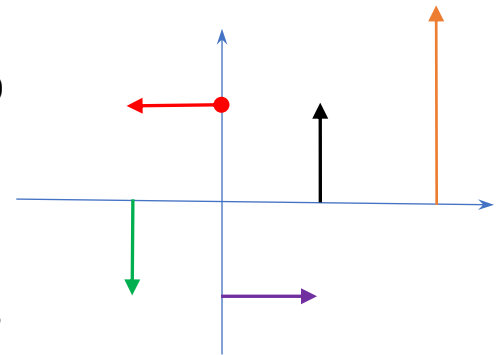
En $(1; 0)$, on a $\vec{V} = 0 \vec{i} + 1 \vec{j} = \vec{j}$ (vecteur **noir**)

En $(0; 1)$, on a $\vec{V} = -\vec{i}$ (ce **vecteur** est tracé à partir de $(0; 1)$)

En $(-1; 0)$, on a $\vec{V} = -\vec{j}$ (vecteur **vert**)

En $(0; -1)$, on a $\vec{V} = \vec{i}$ (**vous avez compris ?**)

En $(2; 0)$, on a $\vec{V} = 2 \vec{j}$ (ce **vecteur** est plus grand !)



Clairement, ce champ de vecteurs semble celui de vecteurs liés à une trajectoire tournant autour du centre du repère.

Cela pourrait être des vecteurs vitesse liés à une éolienne par exemple...

2) Opérateur rotationnel

Le rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ est un vecteur qui se calcule selon le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$



Notez bien : si vous avez un vecteur $\vec{E}$ défini dans le plan, donc avec deux coordonnées, il vous suffit de rajouter une troisième coordonnée E_z égale à 0 pour mettre le calcul en œuvre !

Vérifiez pour $\vec{V} = -y \vec{i} + x \vec{j}$ que le résultat est : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Remarque pratique sur le calcul ci-dessus qu'il serait « bête » de retenir par cœur !

Il s'agit de savoir calculer un produit vectoriel de deux vecteurs et si vous tournez la page, je rappelle gratuitement (c'est très rare de nos jours !!!) comment faire ce calcul....

Donc, pour calculer $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, il faut écrire : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bw - cv \\ cu - aw \\ av - bu \end{pmatrix}$



Il fallait pour cela recopier (en rouge) les deux premières coordonnées sous les vecteurs de départ puis former les croisements symbolisant des produits en croix. Les résultats de ces produits en croix sont placés dans l'ordre dans le vecteur donnant le résultat.

Facile au final non ?

Bien sûr, pour le rotationnel, les coordonnées a , b et c sont des opérateurs de dérivée partielle, il y a quand même du boulot de ce côté !! Travail personnel en perspective...

Reprenons notre présentation du rotationnel....

* Tout champ de vecteurs défini dans le plan, de la forme $\vec{V}(x, y) = V_x(x, y) \vec{i} + V_y(x, y) \vec{j}$, aura un rotationnel de la forme $(0 ; 0 ; h(x, y))$. On peut alors s'intéresser à la seule composante restante.



Si en un point $M(x, y)$, on a $h(x, y)$ positif, cela signifie que le champ a tendance à tourner dans le sens trigonométrique dans cette zone du plan.



Si en un point $M(x, y)$, on a $h(x, y)$ négatif, cela signifie que le champ a tendance à tourner dans le sens inverse au sens trigo dans cette zone.

Remarque : vous pouvez admirer la qualité de ces petits dessins...

* Ainsi, certains logiciels montrent une carte du plan coloriée en zones bleues et en zones rouges. Dans les zones rouges, le champ de vecteurs a une certaine tendance à tourner dans le sens trigo. Très utile pour gagner des points dans certains devoirs !! Mais avant, il faut vérifier la légende du dessin car le rouge peut parfois dire « dans le sens inverse trigo » !

* Certains mathématiciens pas très cools tiennent à alerter les physiciens trop cools qui croient qu'un champ tournant aura forcément un rotationnel non nul indiquant clairement le sens de rotation. Pour cela, ils ont proposé le champ tournant assez simple suivant dont le rotationnel est pourtant nul !!

Vérifiez cette affaire avec soin à titre d'exercice (tracez quelques vecteurs pour observer le caractère tournant du champ, calculez ensuite le rotationnel). $\vec{V}(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j}$

* Un petit jeu pour finir... Prenez une fonction $f(x, y, z)$ quelconque mais pas trop compliquée ! Calculez son gradient, puis calculez le rotationnel de ce gradient. Vous découvrirez alors une très belle propriété !!! Faites-le.....

IV La divergence

Ce dernier opérateur est plus facile d'accès que le rotationnel, n'ayez donc pas peur...



On considère ici un champ de vecteurs $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ (en coordonnées cartésiennes)

On définit la divergence de ce champ selon : $\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

On peut noter avec le produit scalaire : $\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

On pourrait démontrer (et c'est super intéressant de le faire au tableau !!) que cet opérateur renseigne d'une certaine manière sur « ce qui rentre ou sort » globalement d'un petit volume de l'espace. En fait, si l'on trouve un résultat positif dans la zone étudiée, c'est qu'il rentre plus de choses au global. Si la divergence en ce point est nulle, il y a un équilibre : ce qui entre est égal à ce qui sort. Enfin, un résultat local négatif indique qu'il sort plus de choses qu'il n'en rentre dans le petit volume.

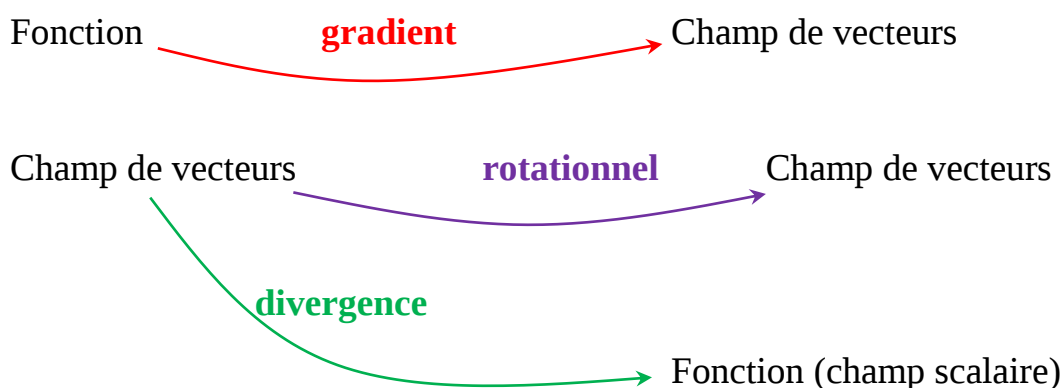
Lorsque les financiers travaillent sur des flux d'argent, et que leurs calculs donnent des divergences négatives, ils commencent à suer à grosses gouttes....

V La fin...

(« La fin » ? pas si certain !)

Voilà qui vous aidera, je l'espère, à mieux comprendre ces mystérieux « opérateurs vectoriels » tant appréciés des physiciens. Il vous reste à revenir vers vos exercices et à travailler très sérieusement ce domaine car il sera important pour la suite...

On retiendra enfin le schéma suivant pour éviter toute erreur....



VI Oups...

N'aurais-je pas oublié un individu dans ce cours sur les Opérateurs vectoriels ? **OUI !**

Le laplacien d'un champ scalaire $f(x, y, z)$ est défini en coordonnées cartésiennes (les seules utilisées dans ce cours) par :
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Très facile à mémoriser celui-ci !! C'est pour cela que je l'avais complètement oublié !

Question : Que fait-il dans cette section ? En effet, il n'y a aucun vecteur dans son écriture !

Réponse : C'est vraiment un cas particulier... Mais, on ne peut l'exclure de l'univers des opérateurs vectoriels puisqu'il utilise des dérivées partielles comme le gradient ou la divergence. Il est juste un peu spécial puisque l'on part d'un champ scalaire pour obtenir un autre champ scalaire. Point de vecteur ici. Sauf que...

En utilisant l'opérateur Nabla, on peut écrire : $\Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$ ou aussi $\Delta f = \vec{\nabla}^2 f$

De plus, dans certains cours de haut niveau, on peut voir un « laplacien vectoriel » défini pour un champ vectoriel $\vec{U} = U_x \vec{i} + U_y \vec{j} + U_z \vec{k}$ selon :
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} = \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \vec{k}$$

Finalement, on voit mieux pourquoi l'opérateur laplacien est intégré dans la section « Opérateurs vectoriels ».

Vocabulaire : Une fonction f est déclarée « harmonique » lorsqu'elle vérifie $\Delta f = 0$. On rencontre de telles fonctions en thermique lorsque l'on calcule la distribution des températures au sein d'un matériau en état stationnaire. On peut aussi en rencontrer en électrostatique lorsque l'on étudie le potentiel V .

Propriété : On peut montrer que le résultat du laplacien de f en un point M est proportionnel à l'écart entre la valeur moyenne de f autour du point M et la valeur de f au point M .

Comme nous sommes dans l'ère de l'image, signalons enfin que le laplacien peut être utilisé dans le traitement des images où il peut servir à détecter des contours.

Pour finir, voici un exercice de curiosité et de courage : Pour la fonction $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, j'ai vu quelque part une belle formule : $\Delta(\Delta f) = 9 f^5$. Essayez de la vérifier !

Conseil : utilisez le calcul formel de GeoGebra pour ne pas y passer la journée.....

**J'espère que vous êtes maintenant plus à l'aise avec ces terribles
« Opérateurs Vectoriels » !!**