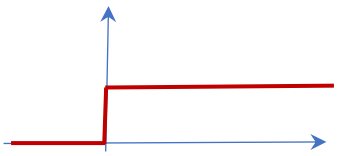
Modéliser une courbe par morceaux

Lorsque l'on travaille avec la transformée de Laplace, on demande parfois de déterminer l'expression temporelle d'une fonction représentée sur un graphe. Il y a une méthode astucieuse que je vous propose d'étudier ici. Les exemples suivants, de difficulté progressive, vous rendront expert en cette matière dans quelques minutes ! L'idée proposée consiste à « vivre avec la courbe ». Vous allez comprendre…

<u>Rappels utiles avant de commencer !</u>

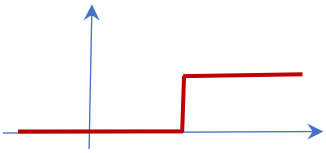
* Tout ce qui suit est basé sur le fait que la fonction échelon de Heaviside est définie par la relation suivante : $u(t) = \begin{cases} 0 & pour\ t \leq 0 \\ 1 & pour\ t > 0 \end{cases}$

Son graphe est simple :

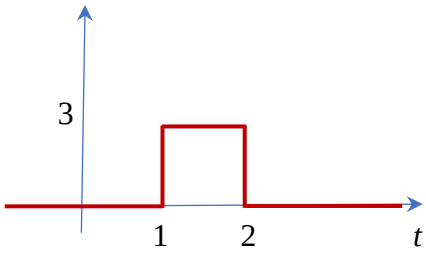


* Soit une fonction $f(t)$ avec son graphe C_f. Exemple : $f(t) = u(t)$ dont le graphe est déjà donné ci-dessus.

Si l'on demande de représenter le graphe de la fonction $f(t-2)$, il suffit de décaler le graphe C_f de deux unités vers la droite. On dit que l'on effectue une translation. Exemple : $u(t-2)$.



I $g(t)$: trop simple !



Cette fonction démarre à $t = 1$ avec le passage de 0 à 3. On ajoute donc une constante +3 à partir de ce moment. On pose donc : $+3\ u(t-1)$.

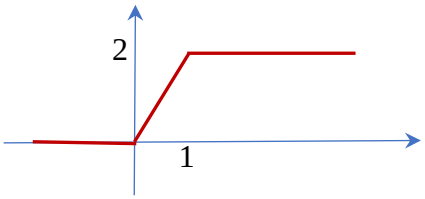
Dans un second temps, à partir de $t = 2$, on redescend à 0. Il faut donc ajouter -3, mais seulement à partir du temps $t = 2$. On pose donc : $-3\ u(t-2)$.

Il n'y a pas d'autre « événement » à partir de $t = 2$, on a donc fini ! Il reste juste à additionner les différents morceaux : $\boldsymbol{g(t) = 3\,u(t-1) - 3\,u(t-2)}$

Pour vérifier votre travail, il est conseillé de calculer une valeur de g pour un temps choisi au hasard. La valeur trouvée devra être égale à celle du graphe de départ.

Exemple : calculons $g(4)$. On a : $g(4) = 3\,u(4-1) - 3\,u(4-2) = 3 \times 1 - 3 \times 1 = 0$.

II $h(t)$ avec une partie linéaire !



Dès $t = 0$, on a une progression de type linéaire de pente égale à 2. On va donc utiliser la forme : $2t\,u(t)$.

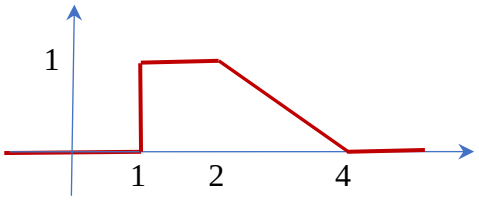
Ensuite, à partir de $t = 1$, cette progression linéaire est annulée. Il faut donc la compenser en ajoutant une progression linéaire de pente -2. Mais on doit le faire à partir de $t = 1$. On ajoutera donc : $-2\,(t-1)\,u(t-1)$.

Il ne se passe rien ensuite, donc on a fini. Au final : $\boldsymbol{g(t) = 2t\,u(t) - 2(t-1)u(t-1)}$

Petites vérifications : $g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ (good !) ; $g(3) = 2 \times 3 - 2(3-1) = 2$ (ça marche…)

Remarque : pour $t = \frac{1}{2}$, le $u(t-1)$ valait 0 puisque $u\left(\frac{1}{2} - 1\right) = u\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

III $k(t)$: un peu plus compliquée…



Un départ classique avec $u(t-1)$.

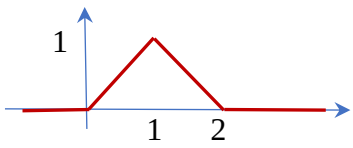
Ensuite, à partir de $t = 2$, on doit ajouter une progression linéaire de pente $-\frac{1}{2}$. On utilisera donc : $-\frac{1}{2}\,(t-2)\,u(t-2)$.

Enfin, à partir de $t = 4$, on doit annuler cette progression linéaire en ajoutant une progression linaire de pente $+\frac{1}{2}$ avec : $\frac{1}{2}\,(t-4)\,u(t-4)$.

Au final : $\boldsymbol{k(t) = u(t-1) - \frac{1}{2}(t-2)\,u(t-2) + \frac{1}{2}(t-4)\,u(t-4)}$

Petites vérifications : $k(3) = 1 - \frac{1}{2}(3-2) = \frac{1}{2}$; $k(5) = 1 - \frac{1}{2}(5-2) + \frac{1}{2}(5-4) = 0$

IV $s(t)$: un triangle !



On part avec une progression linéaire de pente +1 : $t\,u(t)$.

Ensuite, à partir de $t = 1$, on passe à une progression linéaire de pente -1. On doit donc ajouter une progression linéaire de pente -2. On ajoute donc : $-2\,(t-1)u(t-1)$.

Enfin, à partir de $t = 2$, on revient à une pente nulle en ajoutant une progression linéaire de pente $+1$. On ajoute donc : $+1\,(t-2)\,u(t-2)$.

Au final : $\boldsymbol{s(t) = t\,u(t) - 2\,(t-1)\,u(t-1) + (t-2)\,u(t-2)}$

Remarque : je vous laisse la vérification usuelle… Bonne continuation !!