

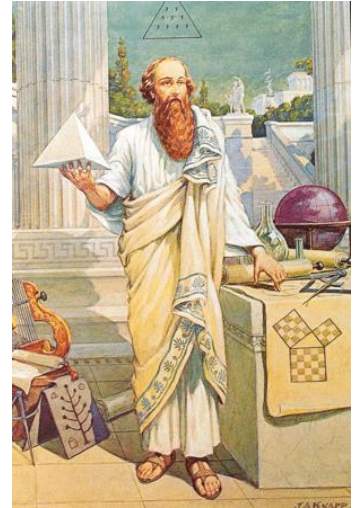
Pythagore et les matrices !

Vous savez que Pythagore a démontré une relation fort intéressante dans tous les triangles rectangles de l'Univers.

Les longueurs de ses petits côtés **a** et **b** sont liées à celle du plus grand côté de longueur **c** (la fameuse hypoténuse) selon : $a^2 + b^2 = c^2$

Le plus célèbre de ces triangles a pour côtés 3 cm, 4 cm et 5 cm.

En effet, ce triangle a des longueurs entières qui sont les plus petites possible pour respecter la relation précédente. Bien entendu, de nombreux triangles rectangles ont des longueurs non nécessairement entières, mais les triangles rectangles à longueurs entières sont plus simples pour les calculs. Dans un tel cas, on parle de triplet Pythagoricien. Notre exemple serait le triplet (3, 4, 5).



Pour mémoire, le triangle rectangle isocèle de petits côtés 1 et d'hypoténuse $\sqrt{2}$ a été au centre d'une vive polémique dans l'Antiquité car c'est la première fois que l'on « voyait » une longueur impossible à écrire sous forme rationnelle. Cette crise des irrationnels montra que certains nombres ne pouvaient s'exprimer sous forme d'une fraction. Le disciple de Pythagore qui avait souligné ce problème aurait été noyé...

Il existe une infinité de triangles rectangles à longueurs entières et le but de cette fiche est de trouver des formules permettant de « fabriquer » de tels triplets Pythagoriciens un peu moins « triviaux » que ceux que l'on pourrait trouver à partir de (3, 4, 5). En effet, on peut fabriquer d'autres triplets en multipliant chaque longueur par 2 : (6, 8, 10), (12, 16, 20)...

Dans un article de Wikipédia, on peut trouver une matrice permettant d'obtenir de tels triplets à partir de (3, 4, 5). Nous allons étudier cette affaire avec plus de détails ici...

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $X_1 = A X_0$ puis $X_2 = A X_1$ et vérifiez que ces triplets sont Pythagoriciens.

2) Calculez le polynôme caractéristique de A et justifiez que A est trigonalisable mais pas diagonalisable. Déterminez alors une matrice P telle que l'on ait : $A = P T P^{-1}$ avec la

matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en justifiant la forme de T .

3) Calculez ensuite T^n pour tout n entier naturel en utilisant une écriture de T de la forme $T = I_3 + N$ et la formule du binôme pour les matrices.

4) Déterminez alors l'écriture de A^n .

5) Calculez $X_n = A^n X_0$. Puis vérifiez que l'on obtient toujours des triplets Pythagoriciens ayant une certaine propriété liée à la longueur des deux côtés les plus grands...