« Matrices » et « Equation différentielles »

Une petite exploration du lien entre ces deux domaines est proposée ici… Dans un premier temps, un petit échauffement matriciel, puis on attaque le côté des équations différentielles !

I Premier petit échauffement : équation matricielle

Mon thermomètre de Galilée dit qu'il ne fait pas bien chaud… Un petit échauffement sera donc profitable ! Pour vous remettre dans le cadre des matrices, je vous propose un exercice très classique : « Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminez les matrices M qui commutent avec A. »

Remarques :

- On cherche donc les matrices M telles que la relation $AM = MA$ soit vérifiée.
- On peut rappeler qu'en général, le produit des matrices n'est pas commutatif. Donc, en général, on observe $AB \neq BA$.
- On peut déjà penser à des matrices solutions assez évidentes comme I_2 (la matrice identité) et A elle-même. En effet, on a bien $AI_2 = I_2A$ et $A\,A = A\,A$.
- On peut aussi dire que pour n quelconque, la relation $A\,A^n = A^n\,A$ est toujours vraie.
- Bon, on a déjà pas mal de solutions… Mais cela ne dit pas s'il en existe d'autres, et cela ne nous donne pas l'expression des solutions. On va donc devoir faire ce qui suit…

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AM = MA$. Ecrivons les relations vérifiées par les coefficients a, b, c et d.

$$AM = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a + c & 4b + d \\ 3a + 2c & 3b + 2d \end{pmatrix}$$

De même : $MA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a + 3b & a + 2b \\ 4c + 3d & c + 2d \end{pmatrix}$

L'équation étudiée est donc équivalente au système : $\begin{cases} 4a + c = 4a + 3b \\ 4b + d = a + 2b \\ 3a + 2c = 4c + 3d \\ 3b + 2d = c + 2d \end{cases}$.

Il faut le résoudre tranquillement avec la méthode du pivot de Gauss. On passe d'abord tous les termes à gauche et ensuite, on pourra rendre le système triangulaire supérieur…

$\begin{cases} -3b + c = 0 \\ -a + 2b + d = 0 \\ 3a - 2c - 3d = 0 \\ 3b - c = 0 \end{cases}$. Avec $L_2 \leftrightarrow L_1$ (échange des lignes 1 et 2) et $L_4 \longleftarrow L_4 + L_1$ (on remplace la ligne 4 par la combinaison linéaire $L_4 + L_1$), on obtient : $\begin{cases} -a + 2b + d = 0 \\ -3b + c = 0 \\ 3a - 2c - 3d = 0 \end{cases}$

Avec $L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_1$ on obtient : $\begin{cases} -a + 2b + d = 0 \\ -3b + c = 0 \\ 6b - 2c = 0 \end{cases}$.

Il reste à faire $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2$. Au final il reste : $\begin{cases} -a + 2b + d = 0 \\ -3b + c = 0 \end{cases}$.

Pour finir, on peut ainsi exprimer *a* et *c* selon : $\begin{cases} a = 2b + d \\ c = 3b \end{cases}$

L'ensemble des solutions est formé des matrices de la forme $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2b + d} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{3b} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$

Que l'on pourrait écrire aussi selon : $\boldsymbol{M = d\, I_2 + b \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$

<u>Remarques en passant (non fondamentales pour une première lecture) :</u>

- $A - 2\, I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Donc : $M = d\, I_2 + b\, (A - 2I_2)$.

Les solutions sont encore de la forme $M = b\, A + (d - 2b)\, I_2$ avec b et d des réels quelconques. Cette forme simple permet une validation facile ! Difficile de s'en priver…

$$AM = A\, (b\, A + (d - 2b)\, I_2) = b\, A^2 + (d - 2b)\, A$$
$$MA = (b\, A + (d - 2b)\, I_2)\, A = b\, A^2 + (d - 2b)A$$

- En prenant *d* = 1 et *b* = 0 , on obtient $M = I_2$. De même, avec *d* = 2 et *b* = 1, on obtient $M = A$. On retrouve bien la présence des solutions « évidentes » discutées plus haut.
- Le fait que les solutions puissent s'écrire selon $M = b\, A + (d - 2b)\, I_2$ peut être mis en relation avec le fait que toutes les matrices du type A^n sont aussi des solutions évidentes. Ceci permet de penser que les matrices A^n pourraient s'écrire très simplement en fonction seulement de A et de I_2 ! Le théorème de Cayley-Hamilton confirme bien cette idée, mais il est hors programme au sein de cette fiche… Dommage !

II Deuxième petit (?) échauffement : le changement de base

On vient de parler de la matrice A^n, mais au fait, est-il possible d'obtenir une formule ? La technique présentée ci-dessous se base sur l'idée qu'élever une matrice diagonale à une puissance *n* est beaucoup plus facile que pour une matrice quelconque. En effet, il suffit d'élever à la puissance *n* ses éléments diagonaux.

On considère ici la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ que l'on souhaite élever à une puissance n quelconque. On pourrait calculer M^2 d'abord, puis M^3…. Mais ce serait bien long !

On pourrait plutôt faire ce travail par récurrence… Mais, l'idée de cette partie est de mettre en œuvre la méthode de changement de base qui marche bien pour certaines matrices dites « diagonalisables ».

Une célèbre série : « Cosmos 1999 »

Qu'est-ce donc ?

Parfois, une matrice M peut s'écrire sous la forme $M = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale. Si c'est possible, on pourrait alors facilement calculer M^n selon la formule suivante (facile à démontrer… à faire par vous-même) : $M^n = PD^nP^{-1}$.
Cette formule est intéressante car on peut très facilement calculer la puissance n d'une matrice diagonale : il suffit de mettre ses coefficients diagonaux à la puissance n !!
Ensuite, il reste à faire le calcul PD^nP^{-1}.

Cette méthode est liée à la technique du « changement de base », avec la matrice P qui est appelée « matrice de passage ». Nous n'étudions pas ici les détails de cette histoire, on travaille juste la méthode qui permet d'arriver au bout du calcul de M^n.

1) Première situation (assez cool…)

On vous donne dès le départ tous les éléments utiles sous la forme du texte suivant :

On considère les matrices : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculez la matrice P^{-1}.
b) Montrez que l'on vérifie bien : $PDP^{-1} = M$.
c) Calculez enfin l'expression générale de M^n.

2) Deuxième situation (plus délicate…)

On peut vous proposer le texte suivant :

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Cherchez des vecteurs X et Y avec des coordonnées simples vérifiant les relations : $MX = 2X$ et $MY = 0$.

Info de cours :

Les nombres 2 et 0 sur la diagonale de D sont appelées « valeurs propres » de M. Les vecteurs associés X et Y sont des vecteurs propres de M.

b) On admet ici que la matrice de passage est formée des vecteurs propres de M. Ecrire alors la matrice P en respectant l'ordre sous la forme : $P = (X \quad Y)$

La fin de l'exercice est alors comme dans la situation 1).

3) Exercices !

Mettez en œuvre cette technique pour calculez les matrices suivantes à la puissance n.

1) $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ avec $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour cette matrice : les valeurs propres sont 5 et 1.

2) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pour cette matrice : les valeurs propres sont 3 et 0

0 est une valeur propre présente deux fois dans D, il faudra donc trouver deux vecteurs propres associés à cette valeur propre.

4) Corrections

* $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ avec $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Recherche des « vecteurs propres » X et Y.

Cherchons X tel que : $MX = 5X$.

Ceci donne : $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. D'où : $\begin{cases} 4a + b = 5a \\ 3a + 2b = 5b \end{cases}$. Ainsi : $\begin{cases} -a + b = 0 \\ 3a - 3b = 0 \end{cases}$

Il ne reste qu'une ligne : $-a + b = 0$. On en déduit : $a = b$

Le vecteur cherché est du type $X = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ et on prend le plus simple possible $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Remarque : on ne prend pas X nul (avec $a = 0$) car on aurait à la fin une matrice P non inversible ! Impossible dans ce cas d'utiliser la formule avec P^{-1}.

Cherchons à présent Y tel que : $MY = 1\,Y = Y$.

Ceci donne : $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. D'où : $\begin{cases} 4a + b = a \\ 3a + 2b = b \end{cases}$. Ainsi : $\begin{cases} 3a + b = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$

Il ne reste qu'une ligne : $3a + b = 0$. On en déduit : $b = -3a$

Le vecteur cherché est du type $Y = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ et on prend le plus simple possible $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) Calcul de M^n.

On peut à présent poser la matrice P de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

On trouve facilement sa matrice inverse avec la formule vue dans le cahier :

$$P^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on peut poser :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Après calculs, on trouve : $\boldsymbol{M^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 + 3 \times 5^n & 5^n - 1 \\ -3 + 3 \times 5^n & 5^n + 3 \end{pmatrix}}$

***** $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de sa collègue $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Recherche des vecteurs propres X, Y et Z

Subtilité : la matrice P aura aussi trois colonnes, donc, il faut chercher trois vecteurs propres.

* Cherchons des vecteurs X tels que : $MX = 3X$

On obtient : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On obtient : $\begin{cases} a + b + c = 3a \\ a + b + c = 3b \\ a + b + c = 3c \end{cases}$

soit : $\begin{cases} -2a + b + c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases}$. On peut faire $L_3 \leftrightarrow L_1$ pour avoir : $\begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \\ -2a + b + c = 0 \end{cases}$

On fait ensuite : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ pour avoir : $\begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ -3b + 3c = 0 \\ 3b - 3c = 0 \end{cases}$

Il reste ainsi : $\begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b = c \end{cases}$ d'où finalement : $\begin{cases} a = c \\ b = c \end{cases}$ soit $X = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$

On peut prendre le plus simple : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* Cherchons les vecteurs Y (forcément, il en faut 2 !!) tels que : $MY = 0\,Y = 0$

On pose donc plus facilement : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui donne : $a + b + c = 0$.

On utilise alors cette relation sous la forme : $c = -a - b$. Ainsi : $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix}$

On peut alors trouver deux vecteurs différents avec a = 1 et b = 0 puis a = 0 et b = 1.

Ceci donne : $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ puis : $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Finalement, la matrice de passage est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) Calcul de la matrice inverse de P

On utilise la formule célèbre : $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\ {}^{t}com(P)$ (voir la fiche dédiée dans **Sup+**)

On obtient après calculs : $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) Il reste à calculer l'expression $M^n = PD^nP^{-1}$

Et au final, vous trouverez que $M^n = 3^{n-1}M$ (valable pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Remarque : on aurait pu trouver ce résultat beaucoup plus rapidement avec une petite récurrence… d'ailleurs je vous propose de réfléchir en ce sens ! Mais la méthode du changement de base permet de réviser pas mal de choses…

III Matrices et équations différentielles

Il est temps de faire le lien avec les équations différentielles !

Dans certaines situations, il se peut que l'on cherche deux fonctions liées au sein d'un système. Nous explorons ici une technique permettant de trouver les solutions…

1) L'explication de l'astuce du changement de base

Devant le système d'équations $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$, on peut simplifier son écriture en posant : $\boldsymbol{X' = MX}$ avec $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Lorsque la matrice *M* peut s'écrire selon $M = PDP^{-1}$, on peut en profiter :

$X' = PDP^{-1}X$ et en multipliant à gauche par P^{-1} : $P^{-1}X' = D\,P^{-1}\,X$

L'idée est alors de poser un changement de variable : $Y = P^{-1}\,X$. Notons $Y = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$

La matrice *P* étant indépendante du temps, on peut écrire : $Y' = P^{-1}\,X'$.

Le système à résoudre est alors : $Y' = D\,Y$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ce système s'écrivant $\begin{cases} a'(t) = \lambda_1\,a(t) \\ b'(t) = \lambda_2\,b(t) \end{cases}$, la solution est immédiate : $\begin{cases} a(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ b(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$.

On peut enfin trouver les fonctions *x(t)* et *y(t)* en faisant : $X = P\,Y$.

Exemple (suite et fin) :

Pour $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, on trouvait $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la solution est : $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{5t} \\ C_2 e^{t} \end{pmatrix}$ Ainsi : $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{t} \\ y(t) = C_1 e^{5t} - 3C_1 e^{t} \end{cases}$.

Les constantes pourraient être déterminées avec des conditions initiales imposées…

Dans la plupart des cas, ces fonctions tendent vers l'infini, ce système physique ne va pas rester intact bien longtemps….. On dit qu'il est instable.

2) Recherche des valeurs propres d'une matrice

On cherche ici des valeurs λ_i telles qu'il existe des vecteurs X_i vérifiant la relation entre valeurs propres et vecteurs propres : $M\,X_i = \lambda_i\,X_i$.

La procédure à mettre en œuvre est la suivante :

Ecrire la matrice *M* en ajoutant $-\lambda$ sur la diagonale, puis calculer le déterminant de cette nouvelle matrice $M - \lambda\,I_d$.

On obtient les valeurs propres en résolvant $\det(M - \lambda\,I_d) = 0$.

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On doit résoudre : $\det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0$. Soit : $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Ceci donne : $(1-\lambda)^2 - 1 = 0$ et on trouvera bien les valeurs 2 et 0.

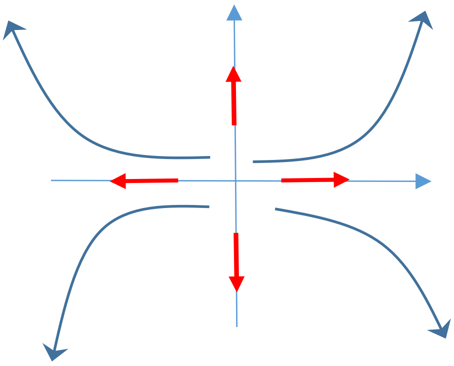
Remarque : pour une matrice 3×3, on calculera le déterminant avec la règle de Sarrus.

3) La richesse du système $X' = MX$

Selon la matrice M, les situations peuvent être très variées ! En effet, il existe pas mal de possibilités de solutions pour les valeurs propres… On regarde rapidement quelques cas ci-dessous où on donne une représentation symbolique des solutions dans un « espace des phases » qui résume l'évolution du système étudié.

a) $\boldsymbol{\lambda_1 > 0 \ \ et \ \ \lambda_2 > 0}$

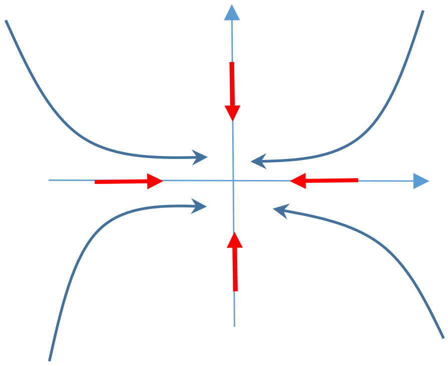
Le système est instable et le graphique est du type :



Les axes du repère « repoussent » les trajectoires vers l'extérieur.

b) $\boldsymbol{\lambda_1 < 0 \ \ et \ \ \lambda_2 < 0}$

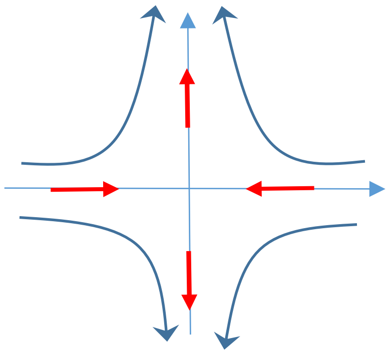
Le système est stable et le graphique est du type :



Les axes du repère « attirent » les trajectoires vers l'intérieur.

c) $\boldsymbol{\lambda_1 < 0 \ \ et \ \ \lambda_2 > 0}$

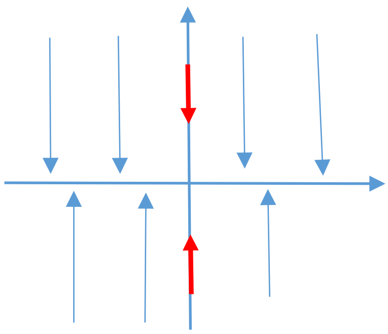
Le système est instable et le graphique est du type :



Un axe « attire » les trajectoires vers l'intérieur.
Mais l'autre axe repousse les trajectoires vers l'extérieur.
On a un point « col » ou « point selle ».

d) $\boldsymbol{\lambda_1 = 0 \ \ et \ \ \lambda_2 < 0}$

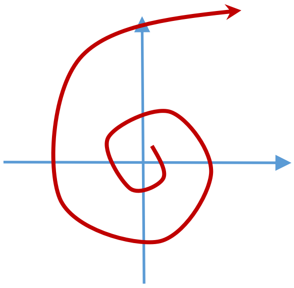
Le système est stable et le graphique est du type :



Un axe « attire » les trajectoires vers l'intérieur.
L'autre axe ne fait rien !

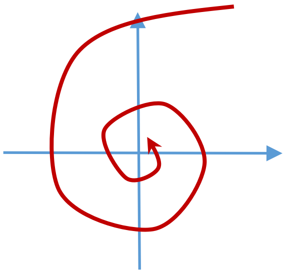
e) $\boldsymbol{\lambda_i = \alpha \pm i\beta \quad et \quad \alpha > 0}$

Le système part en oscillations avec une amplitude croissante…



Instabilité du pont du détroit de Tacoma (Etat de Washington) quatre mois après son inauguration le 1er juillet 1940, le pont est détruit le 7 novembre de la même année. Il n'a fallu que 70 minutes pour que l'amplitude des oscillations ne conduise à l'effondrement.

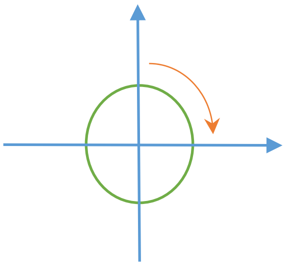
e) $\boldsymbol{\lambda_i = \alpha \pm i\beta \quad et \quad \alpha < 0}$



Le système part aussi en oscillations, mais dont l'amplitude est cette fois décroissante…
Le système est donc stable.

Soumis à une déformation passagère, il est revenu tranquillement dans son état stable…

f) $\boldsymbol{\lambda_i = \pm i\beta}$



Le système part aussi en oscillations régulières, avec une amplitude constante.
Le système est dans un état oscillatoire.

Après tous ces aspects théoriques, passons à la pratique !

La partie suivante propose les bases permettant de comprendre comment on peut résoudre des équations trop difficiles à manipuler de manière « directe ».

IV Résoudre une équation différentielle avec Euler et Excel…

Tout le monde sait résoudre l'équation : $\boldsymbol{y' + y = x + 1}$ avec $y(0) = 1$.

On obtient $y(x) = e^{-x} + x$ (vérifiez-le, ça fait un petit exo au passage…)

Ici, l'idée est de résoudre numériquement cette même équation. Ce mini-cours sera un exemple pour vous lancer ensuite dans d'autres exercices… Nous allons faire comme s'il était impossible de résoudre de manière théorique cette équation (comme ci-dessus). On va donc tenter une approche numérique en s'aidant de l'ordinateur.

1) Discrétisation de l'équation

Nous allons considérer ici que la variable x représente le temps qui passe lors d'une expérience. On prendra donc x allant de 0 (départ de l'expérience) jusqu'à l'infini !

Comme la valeur de x peut prendre une infinité de valeurs, et ceci, même pour x variant entre 0 et 1 seconde, il est impossible de calculer en un temps fini, l'infinité des valeurs de la solution. On peut même dire que cela serait stupide !

Il suffit de connaître les valeurs de la solution tous les dixièmes de seconde par exemple, ce sera suffisant dans de nombreuses situations réelles. Si besoin, on pourra descendre au millième de seconde… Ceci dépend du problème étudié.

Le fait de « découper » le temps en petits intervalles s'appelle la discrétisation du problème.

Pour la suite, on note les temps sous la forme x_i.

Ainsi, dans le cas où on discrétise tous les 0,1 seconde, les temps seront successivement : $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}2$; …. Le pas de la discrétisation est souvent noté Δx.

On peut écrire de façon générale : $x_i = i\,\Delta x$.

Si le temps est discrétisé, la solution l'est également. On note $y(x_i) = y_i$ la valeur de la solution au temps i. De même pour la dérivée au temps i : $y'(x_i) = y_i'$.

Notre équation s'écrit alors en chaque temps x_i selon : $y_i' + y_i = x_i + 1$.

Comme la résoudre ?

2) Résolution de l'équation

Le problème est le suivant : il faut déterminer la valeur de la solution à chaque temps x_i. Donc, les inconnues du problème sont : y_1 ; y_2 ; y_3 ; ……… On connaît juste y_0 grâce à la condition initiale imposée au départ.

La traduction du terme y_i' est la clé du problème. Pour ce faire, il faut rappeler la définition de la dérivée d'une fonction. On l'approche d'abord par un taux de variation et on fait tendre le dénominateur vers 0. Tout ceci s'écrit : $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Pour notre cas, on pose de manière similaire : $y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$. Dans notre cas, l'écart en temps est fixé, on ne le fera pas tendre vers 0 car on garde un temps découpé selon un Δx donné.

Cette tactique est la « méthode d'Euler explicite ». M. Euler ci-contre :

Ainsi, l'équation à résoudre est transformée en : $\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x} + y_i = x_i + 1$

Par exemple, lorsque i vaut 0, on obtient :

$$\frac{y_1 - y_0}{\Delta x} + y_0 = x_0 + 1 \quad \text{(avec } x_0 = 0\text{)}$$

Cette équation n'a qu'une inconnue (facile !) :

$$y_1 = (1 - \Delta x)\, y_0 + \Delta x\, (x_0 + 1)$$

Moralité, on a pu trouver la valeur y_1 en fonction de la valeur imposée y_0.

De proche en proche, on pourra calculer les valeurs suivantes de notre solution. La formule générale est : $\boldsymbol{y_{i+1} = (1 - \Delta x)\, y_i + \Delta x\, (x_i + 1)}$

3) Avec Excel

On fait une colonne pour les temps discrétisés. On fait aussi une colonne pour les valeurs de la solution que l'on calcule pas à pas…

On obtient un truc du genre ci-contre :

	pas de temps :	
	0,1	
valeurs des i	temps xi	valeurs des yi
0	0	1
1	0,1	1,01
2	0,2	1,029
3	0,3	1,0561

Il ne vous reste plus qu'à « jouer » avec cette méthode pour voir par vous-même… Vous pourrez alors tracer l'évolution de *y(t)* en fonction de *x(t)* pour visualiser l'espace des phases.

Pour vérifier vos calculs, vous pouvez ajouter une colonne en calculant la solution exacte pour ensuite la comparer avec votre solution « approchée » numériquement. Vous pourrez aussi comparer vos résultats avec l'approche théorique et réfléchir aux éventuelles différences…

Voici de petits systèmes à résoudre (théoriquement puis numériquement !) :

a) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$

A ce stade, vous devriez être plus autonomes… Bonne route !!

Au fait, que fait-il là mon thermomètre ? Lorsqu'un solide descend lentement dans un fluide, il est soumis à des forces extérieures et répond à une équation différentielle !