Les méchants polynômes….

Au départ, ils ont tout pour être sympathiques ! En effet, vous connaissez bien les fonctions du type $f(x) = ax^2 + bx + c$ que vous étudiez en calculant la dérivée et en donnant les variations.

Exemple :
$f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ dont la dérivée est $f'(x) = 6x - 12$. Elle s'annule en $x = 2$ ce qui permet de conclure : *f* est décroissante sur $] -\infty ; 2]$ puis croissante sur $[2 ; +\infty [$.

Ce genre d'étude est basée sur le concept de fonction, dépendant de la variable réelle notée par la célèbre lettre *x*. Nous étudions ici des polynômes, MAIS, sous un autre angle, celui de l'algèbre. L'objectif est complètement différent et nécessite donc… des concepts différents ! Suivez le guide et vous comprendrez un peu mieux cet univers…

Dans toute la suite de ce mini-cours, la variable d'un polynôme est notée X. Un polynôme n'est pas vu ici comme une fonction, mais comme un « objet » mathématique dont certaines propriétés vont être étudiées. Le précédent exemple serait donc $\boldsymbol{P(X) = 3X^2 - 12X + 5}$.

I Ensemble de polynômes

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On note aussi $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Cette distinction aura son importance par la suite.

Une notation particulière est celle des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{R}_n[X]$.

On peut donc écrire : $P(X) = 3X^2 - 12X + 5 \in \mathbb{R}_2[X]$ ou aussi $\in \mathbb{R}_3[X]$!

$Q(X) = X^3 - (1 + i)X + 7 \in \mathbb{C}_3[X]$ $Q \in \mathbb{C}_5[X]$ est vrai aussi.

Remarque : comme l'ensemble des réels est inclus dans l'ensemble des complexes, tout polynôme à coefficients réels appartient aussi à $\mathbb{C}[X]$. L'inverse n'est pas vrai, par exemple le polynôme Q n'est pas dans $\mathbb{R}[X]$ à cause du coefficient $1 + i$.

II Degré d'un polynôme

Le degré d'un polynôme est un concept bien connu. Il est égal à la plus grande puissance de la variable X ayant un coefficient non nul. Néanmoins, il existe certaines subtilités moins connues ! Voici donc quelques infos…

On note $deg(\ldots)$ le degré d'un polynôme. On a ainsi : $deg(P) = 2$ et $deg(Q) = 3$.

Un polynôme constant a un degré nul. Exemple : $R(X) = 2 \Rightarrow deg(R) = 0$

Subtilité : le polynôme nul est un polynôme constant particulier. Son degré est égal à $-\infty$. Cette convention a un intérêt qui sera plus clair dans quelques instants…

<u>Règles de calcul des degrés</u>

Soient des polynômes P et Q de degrés respectifs n et m. On a alors :

$\boldsymbol{deg(P+Q) \leq max\,(n,m)}$ on ne peut rien préciser de plus !

$\boldsymbol{deg(PQ) = n+m}$ on a ici la valeur exacte.

Vous pouvez tester ces deux formules avec les exemples suivants :

1) $P(X) = X^2 + X + 1 \quad Q(X) = -X^2 + 5$

2) $P(X) = 0 \quad Q(X) = X^2 + (1-i)X + 3i$

3) $P(X) = X^4 + 1 \quad Q(X) = X^2 - X + 1$

Remarques :

- Si l'on a $deg\,(P) \neq deg\,(Q)$, alors $deg(P+Q) = max\,(n,m)$.
- les calculs sur les polynômes se font avec les règles usuelles. Un petit exemple avec $P(X) = X + 2 \quad Q(X) = X^2 + X + 1$. On obtient $P(X) + Q(X) = X^2 + 2X + 3$ et aussi $P(X)Q(X) = (X+2)(X^2+X+1) = X^3 + 3X^2 + 3X + 2$

III Racines d'un polynôme et factorisation

Lorsque vous cherchez les solutions de l'équation $3x^2 - 12x + 5 = 0$, vous calculez le discriminant : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 84$ puis vous déterminez les deux solutions.

On obtient ici : $x_1 = 2 - \frac{\sqrt{21}}{3}$ et $x_1 = 2 + \frac{\sqrt{21}}{3}$

Dans l'univers des polynômes, on dira : « Les racines de $P(X) = 3X^2 - 12X + 5$ sont les réels $2 - \frac{\sqrt{21}}{3}$ et $2 + \frac{\sqrt{21}}{3}$ ».

On peut alors écrire P sous forme factorisée : $P(X) = 3\left(X - 2 + \frac{\sqrt{21}}{3}\right)\left(X - 2 - \frac{\sqrt{21}}{3}\right)$

Attention à ne pas oublier de reporter le coefficient dominant de P !!

Exercice classique :

« Factorisez $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$. »

Il faut dans un premier temps chercher les racines de P. Or, il est difficile de résoudre des équations de degré 3 ! Il faut donc chercher des racines « évidentes ». On testera les calculs de $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(-2)$, $P(i)$, $P(-i)$, $P(2i)$, $P(-2i)$, …

Ici, on trouve facilement : $P(1) = 0$. Comme le réel 1 est racine de P, on en déduit que P peut être factorisé par le facteur $(X - 1)$.

Le polynôme P étant de degré 3, on cherche à écrire : $P(X) = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$.

En développant et en identifiant avec la forme de départ de P, on trouve facilement les coefficients inconnus a, b et c. Au final : $P(X) = (X - 1)(X^2 + 1)$.

Remarque : le coefficient a pouvait être deviné car il vaut le coefficient dominant de P. De même, la valeur de c était liée au terme constant de P, donc facile à deviner.

Le polynôme $X^2 + 1$ n'ayant pas de racines réelles, on dit que la forme factorisée de P dans $\mathbb{R}[X]$ est $P(X) = (X - 1)(X^2 + 1)$.

En revanche, $X^2 + 1$ admet deux racines complexes : i et $-i$. On peut donc le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$. Cela donne : $(X - i)(X + i)$.

On obtient ainsi la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = (X - 1)(X - i)(X + i)$.

Vocabulaire :

On dit que P est « **scindé** » sur $\mathbb{C}$ car il peut s'écrire comme un produit de facteurs de degré 1 du type $(X - a)$ avec a un élément de $\mathbb{C}$. En revanche, P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ car le terme $X^2 + 1$ ne peut pas s'écrire sous la forme $(X - a)(X - b)$ avec a et b réels.

Théorème de D'Alembert-Gauss

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à un admet au moins une racine complexe.

Ce « petit » théorème tout simple est appelé « théorème fondamental de l'algèbre ». C'est dire son importance. On peut aussi le traduire en disant que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 est scindé sur $\mathbb{C}$.

Conclusion : le problème de savoir si un polynôme de degré supérieur ou égal à un est scindé ou non ne se pose en fait que pour les polynômes de $\mathbb{R}[X]$!!!

IV Arithmétique des polynômes

Quand on vous demande les diviseurs de 15, vous dites : 1 ; 3 ; 5 et 15.

Si on vous demande de prouver que 15 est divisible par 5, vous pouvez donner la relation de divisibilité : $15 = 3 \times 5$.

Si on vous demande « Montrez que 15 et 14 sont des nombres premiers entre eux »….

Vous pouvez donner la décomposition de ces deux nombres en facteurs premiers selon : $15 = 3 \times 5$ et $14 = 2 \times 7$. Comme ils n'ont aucun facteur commun, on les déclare « premiers entre eux ».

Tout ceci est du domaine de l'arithmétique des entiers.

Et tout ceci se retrouve avec les polynômes ! Voici quelques exemples pour passer en revue les notions usuelles…

1) $P(X) = X^2 - 1$ est divisible par $Q(X) = X + 1$. En effet : $X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$. On peut ainsi écrire la relation : $P(X) = (X - 1)Q(X)$.

2) $P(X) = X^2 - 1$ et $Q(X) = X^2 + 5X + 6$ sont premiers entre eux. En effet, on peut écrire : $P(X) = (X + 1)(X - 1)$ et $Q(X) = (X + 2)(X + 3)$. P et Q n'ont donc aucun facteur commun de degré supérieur ou égal à 1.

3) Le PGCD de $P(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$ et $Q(X) = 2X^3 + 6X^2 - 2X - 6$ est le polynôme unitaire $A(X) = X^2 - 1$. En effet, en cherchant les racines de nos polynômes, on peut les factoriser selon : $P(X) = (X^2 - 1)(X + 2)$ et $Q(X) = 2(X^2 - 1)(X + 3)$. Le polynôme $A(X) = X^2 - 1$ est donc le polynôme unitaire de degré le plus élevé à la fois dans la décomposition de P et dans celle de Q.

Vocabulaire :

Un polynôme dont le terme de plus haut degré est affecté du coefficient 1 est dit **unitaire**. Par exemple : $P(X) = X^3 + 2X^2 - 5$ est unitaire.

4) Considérons la relation $X^3 + X^2 - X - 3 = (X + 1)(X^2 - 2) + (X - 1)$. On peut dire que la division euclidienne de $A(X) = X^3 + X^2 - X - 3$ par $B(X) = X^2 - 2$ admet un quotient égal à $Q(X) = X + 1$ et un reste égal à $R(X) = X - 1$. On peut aussi écrire la relation : $A(X) = Q(X)B(X) + R(X)$ où $deg(R) < deg\,(B)$.

Propriétés :

- Si Q divise P, alors P a les racines de Q. On aurait : $P(X) = Q(X)B(X)$.
- a est racine de P si et seulement si P est divisible par $(X - a)$.

Comment effectuer la division euclidienne de deux polynômes ?

On pose la division comme ce qui suit avec l'exemple de $P(X) = X^3 + 2X - 1$ que l'on veut diviser par $Q(X) = X^2 + 3X + 1$.

$$\begin{array}{l|l} X^3+2X-1 & X^2+3X+1 \\ \cline{2-2} \qquad \ldots\ldots & \text{quotient} \\ \qquad \text{reste} & \end{array}$$

On y va :

$$\begin{array}{r|l} X^3+2X-1 & X^2+3X+1 \\ \cline{2-2} -(X^3+3X^2+X) & X \\ \hline -3X^2+X-1 & \end{array}$$

Puis : :

$$\begin{array}{r|l} X^3+2X-1 & X^2+3X+1 \\ \cline{2-2} -(X^3+3X^2+X) & X-3 \\ \cline{1-1} -3X^2+X-1 & \\ -(-3X^2-9X-3) & \\ \cline{1-1} 10X+2 & \end{array}$$

Au final, on obtient la relation de la division euclidienne de X^3+2X-1 par X^2+3X+1:

$$X^3+2X-1=(X-3)(X^2+3X+1)+10X+2$$

Le quotient de cette division est $X-3$ et le reste est $10X+2$.

V Polynômes irréductibles

Pour décomposer les entiers, on les écrit comme des produits de *nombres premiers*. Par exemple $140=2^2\times 5\times 7$.

Pour les polynômes, on a le même genre de démarche. Les nombres premiers sont dans ce cas remplacés par des polynômes dits « irréductibles ».

1) Dans $\mathbb{R}[X]$, il existe deux sortes de polynômes unitaires irréductibles :

- les polynômes de degré 1 de la forme $X-a$
- les polynômes de degré 2 de la forme X^2+bX+c avec $b^2-4c>0$

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut donc être décomposé comme produit de facteurs irréductibles de deux types différents.

2) Dans $\mathbb{C}[X]$, il existe en revanche une seule sorte de polynôme unitaire irréductible :

- les polynômes de degré 1 de la forme $X-a$

Exemple :

Factorisez le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 - X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

On cherche des racines « évidentes » et on observe $P(2) = 0$.
Donc, on peut écrire $P(X) = (X - 2)(X^2 + aX + b)$. Il reste à développer puis identifier pour obtenir les valeurs de a et b… On trouve : $P(X) = (X - 2)(X^2 + X + 1)$.
Il reste à trouver les racines de $X^2 + X + 1$, ce qui est facile puisque l'on peut calculer son discriminant….
On obtient les racines $-\frac{1}{2} + i\sqrt{3}$ et $-\frac{1}{2} - i\sqrt{3}$.
En mathématiques, le nombre complexe $-\frac{1}{2} + i\sqrt{3}$ est célèbre. On le note j. Attention, il ne faut pas le confondre avec la notation j utilisée en électricité en lieu et place de i !!
Finalement, on a les racines j et son conjugué $\bar{j}$.
D'où la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = (X - 2)(X - j)(X - \bar{j})$.

Remarque : Ce type d'exercice n'est pas toujours facile ! Par exemple, si l'on considère le polynôme $P(X) = X^4 - X^3 + 3X^2 - X + 6$ qui ne possède pas la moindre racine réelle, sa factorisation de la forme $(X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$ serait très difficile… En effet, ce problème conduit à un système d'équations non linéaire entre les coefficients inconnus. Tout ceci est expliqué dans la partie VI pour le *fun*…

Astuce / Rappel :

Pour factoriser $P(X) = X^6 + 1$, on pourra utiliser les nombres complexes dès le départ en utilisant les fameuses racines nièmes ! En effet, les racines de P vérifient : $X^6 + 1 = 0$ qui est aussi : $X^6 = -1$.

On peut alors la résoudre sous forme complexe en posant : $X = \rho e^{i\theta}$ et $-1 = e^{i\pi}$.

On pose donc : $\rho^6 e^{i6\theta} = e^{i\pi}$ qui donne : $\begin{cases} \rho^6 = 1 \\ 6\theta = \pi + k2\pi \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$.

On obtient les six racines (formées de trois couples conjugués) ce qui donnera la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$. Pour revenir dans $\mathbb{R}[X]$, il restera à regrouper les facteurs ayant des racines conjuguées pour reformer des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Vous voilà j'espère plus expert en matière de polynôme ! Il est ensuite facile de se créer de petits exercices pour s'entraîner… *Do it yourself !!*

Exemple :

Je considère $P(X) = (X + 1)(X^2 + 2X + 3)$ que je développe… Enfin, je cherche à le factoriser (mais sans regarder sa forme de départ…).

VI Et ce méchant polynôme ?

Au départ, je me suis créé cet exercice en prenant deux polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis en faisant leur produit : $P(X) = (X^2 + X + 2)(X^2 - 2X + 3)$.

Après développement, on obtient : $P(X) = X^4 - X^3 + 3X^2 - X + 6$

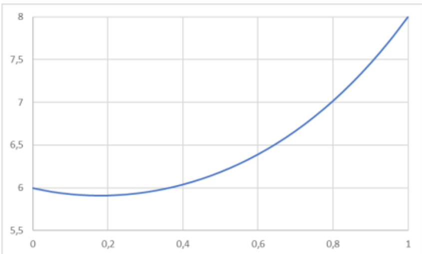
Voici donc l'exercice :

Soit $P(X) = X^4 - X^3 + 3X^2 - X + 6$. Factorisez P dans $\mathbb{R}[X]$ en utilisant des polynômes unitaires.

But avoué : retrouver l'expression ci-dessus d'où j'étais parti !!!

Analyse de la situation :

- P admet-il des racines réelles ? On peut considérer la fonction associée et l'étudier pour détecter d'éventuelles racines. Soit $f(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 6$. Sa dérivée est $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ et sa dérivée seconde $f''(x) = 12x^2 - 6x + 6$. Avec $f''(x) = 6(2x^2 - x + 1)$, il est facile de voir que f'' reste toujours positive. Donc f' est une fonction strictement croissante. On observe $f'(0) = -1$ et $f'(1) = 6$. Au final, f' est négative puis devient positive pour un certain réel α situé entre 0 et 1. Comme $f'(0)$ est beaucoup plus proche de 0 que $f'(1)$ ne l'est, on peut conjecturer que α est très voisin de 0. D'ailleurs : $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$ est positif. Donc α est entre 0 et $\frac{1}{4}$. Avec $f(0) = 6$ et $f(1) = 8$, on voit mal cette fonction passer dans les négatifs au voisinage de ¼ ! Ceci est facile à confirmer avec le tracé de cette fonction en utilisant GeoGebra ou bien Excel.



  Conclusion : f n'admet pas de racine réelle.

- Le polynôme P n'admet pas de racine réelle, il sera donc factorisable avec deux polynômes irréductibles. On cherche donc des réels a, b, c et d tels que l'on puisse écrire : $P(X) = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$

On y va : on développe cette expression puis on l'identifie avec l'écriture de P.

On obtient :

$$P(X) = X^4 - X^3 + 3X^2 - X + 6 = X^4 + (a+c)X^3 + (b+d+ac)X^2 + (ad+bc)X + bd$$

D'où le système : $\begin{cases} a + c = -1 \\ b + d + ac = 3 \\ ad + bc = -1 \\ bd = 6 \end{cases}$.

On pense tout de suite à utiliser les relations $c = -1 - a$ et $d = \frac{6}{b}$ pour obtenir le système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} b + \frac{6}{b} + a(-1-a) = 3 \\ \frac{6a}{b} + b(-1-a) = -1 \end{cases}$. Multiplions le tout par b et développons joyeusement pour obtenir : $\begin{cases} b^2 + 6 - ab - a^2b = 3b \\ 6a - b^2 - ab^2 = -b \end{cases}$.

C'est le moment de l'angoisse…. Que faire de ces équations non-linéaires ? Pas facile…. Il semble impossible d'obtenir une équation avec une seule inconnue...

Ah ? Une idée !

La deuxième ligne permet d'écrire : $a = \frac{b^2-b}{6-b^2}$ (en espérant que $b^2 \neq 6$).

On reporte cette expression dans la première ligne : $b^2 + 6 - \frac{b^2-b}{6-b^2} b - \left(\frac{b^2-b}{6-b^2}\right)^2 b = 3b$.

Voilà une petite équation avec une seule inconnue !!! On y est presque…

On met tout au même dénominateur et on obtient la très sympathique équation vérifiée par l'inconnue b : $b^6 - 3b^5 - 5b^4 + 29b^3 - 30b^2 - 108b + 216 = 0$ (si !!).

Le tracé de la fonction liée à cette équation permet de conjecturer qu'il existe deux solutions réelles : 2 et 3.

On utilise alors cette « entrée » pour trouver les valeurs respectives de *a* : 1 et -2.

Ensuite, il reste à trouver *c* et *d* en utilisant nos valeurs de *a* et *b*.

Finalement, on obtient les solutions :

$P(X) = (X^2 + X + 2)(X^2 - 2X + 3)$ et $(X) = (X^2 - 2X + 3)(X^2 + X + 2)$.

On constate finalement, à l'ordre près des facteurs, que la solution est unique et on est bien content d'avoir fini !!!

La théorie de recherche des racines des polynômes a fait un pas gigantesque avec le célèbre **Evariste Galois** (1811-1832) à qui l'on doit la théorie de Galois. Elle permet de comprendre qu'il est impossible en général d'obtenir les racines d'un polynôme de degré supérieur ou égal à 5 sous la forme de formules n'utilisant que des opérations algébriques usuelles et des racines nièmes (on dit aussi « avec des radicaux »).