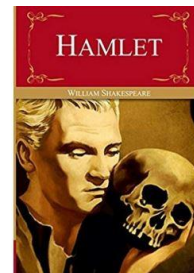


L'angoisse extrême du choix...



Depuis toujours, l'être humain se pose des questions... Certaines d'entre elles sont plus cruciales, mais elles génèrent toutes une part d'angoisse... (plus ou moins intense, j'en conviens).

- Bleu ou vert le canapé ? - To be or not to be, that is the question.
- Je révise la trigonalisation ou je vais à la soirée ? - Je pointe ou je tire ?

Nous examinons dans cette fiche une autre situation fort délicate...

On considère une matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. On trouve ensuite que A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, on cherche alors à la trigonaliser en utilisant le fameux théorème de Jordan.

I On suppose A semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (λ est donc la seule valeur propre de A).

Soit u un vecteur non nul tel que $A u = \lambda u$. On cherche alors un vecteur v vérifiant la relation $A v = u + \lambda v$ en accord avec la seconde colonne de T .

Vous obtenez un système... et en fin de calcul, vous devez choisir la valeur du paramètre. Là se loge l'angoisse... Et si votre choix s'avérait mauvais ? En effet, vous allez peut-être trouver un vecteur v qui serait lié à u ! Or, vous êtes en train de construire une base, donc u et v doivent être libres.

1) Supposons par l'absurde obtenir : $v = k u$ (à la suite d'un choix malheureux...). Sachant ensuite que $A v = u + \lambda v$, montrez que l'on obtient une contradiction à un moment donné...

2) Menez une démarche similaire pour le dernier vecteur w tel que $A w = v + \lambda w$ qui reste à choisir avec un choix du même genre (faites l'hypothèse absurde : $w = c u + d v$).

II On suppose A semblable à $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ (a et b sont donc valeurs propres de A).

Soit u un vecteur non nul tel que $A u = a u$. Soit v un vecteur non nul tel que $A v = b v$. On cherche alors un vecteur w vérifiant la relation $A w = v + b w$ en accord avec la dernière colonne de T .

Supposez que votre choix du paramètre vous conduise à un vecteur w lié aux deux premiers sous la forme $w = r u + s v$. Montrez alors que l'on obtient une contradiction.

Conclusion : lors du choix de la valeur d'un paramètre dans le processus visant à trouver un nouveau vecteur pour compléter la future base, il y a de bonnes chances que votre choix ne pose aucun problème !