Séries de Fourier

I Introduction

1) Qui était Joseph Fourier (1768-1830) ?

Joseph Fourier était un mathématicien et physicien français, il a étudié le phénomène de propagation de la chaleur. En 1821, il expose ses travaux dans sa « Théorie analytique de la chaleur ». Il donne l'équation de diffusion de la chaleur et en propose les solutions.
En particulier, il expose l'idée que toute fonction peut s'écrire sous la forme d'une série de fonctions trigonométriques de la forme :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Très vite, ces séries ont été la source de nombreux travaux au cours du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. En particulier, la théorie de l'intégration y jouait un rôle important, d'où l'importance du travail de Lebesgue par exemple.

2) A quoi cela sert-il ?

La transformée de Fourier est un outil mathématique de première importance dans des domaines très variés. Surtout depuis l'arrivée des ordinateurs, qui ont permis de faire les calculs nécessaires.
Elle est utilisée : (i) pour caractériser des signaux temporels afin d'étudier leur nature (signal périodique, chaotique, bruit blanc… ?) ; (ii) pour « purifier » des signaux bruités en filtrant le bruit à haute fréquence ; (iii) dans le traitement des images afin d'en améliorer la qualité…
Bref, on la trouve un peu partout en physique et en médecine…

Pour votre formation, on va étudier la notion de série de Fourier (à l'origine de la transformée de Fourier).

3) Pourquoi une telle importance ?

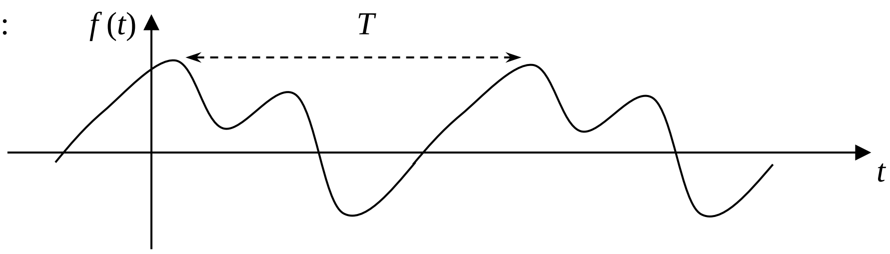
De très nombreux phénomènes physiques sont liés à des conditions périodiques : alternance jour/nuit ; courant électrique ; ondes sonores et lumineuses ; oscillations d'un système mécanique…
Un modèle bien connu depuis longtemps de fonction périodique est le sinus… et bien sûr le cosinus !
Les sinus et cosinus sont donc une base incontournable pour l'étude des phénomènes périodiques. Ils permettent de décrire les solutions de nombreuses équations : équation de la chaleur, équation des cordes vibrantes, équations de Maxwell pour les ondes électromagnétiques…
Finalement, de nombreuses fonctions sont ainsi exprimées sous la forme d'une somme de sinus et de cosinus.

II Séries de Fourier

On considère ici une fonction f périodique. On note sa période T.

On pose : la fréquence $F = \frac{1}{T}$ La pulsation fondamentale $\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}$

On a le schéma suivant :



Le paramètre t représente le temps mais il peut aussi être utilisé pour représenter la position spatiale sur un axe.

On cherche à modéliser f sous la forme d'une série de fonctions trigonométriques. La recherche de la meilleure approximation de f entraîne des valeurs bien précises pour certains coefficients a_n et b_n. Ces derniers sont calculés selon des formules bien déterminées.

1) Décomposition en série de Fourier

Dans certaines conditions peu restrictives en physique, f (en fait, c'est presque f, on reparlera de cette subtilité un peu plus tard) peut s'écrire sous la forme d'une série (une somme infinie) :

$$\tilde{f}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

les pulsations $n\omega$ sont appelées les harmoniques de rang n.
a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier de f.

On a : $a_0 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt$ avec α réel quelconque
a_0 est la valeur moyenne de f sur une période

et pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos(n\omega t)\, dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin(n\omega t)\, dt$$

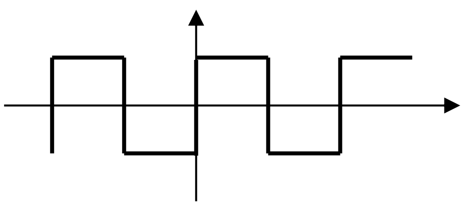
On peut librement choisir la valeur de α en fonction des situations proposées.
Si l'on prend $\alpha = 0$, alors : $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\, dt$.
Mais on peut aussi prendre $\alpha = -\frac{T}{2}$ ce qui donnerait : $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t)\, dt$

Remarque : Dès qu'un coefficient de rang n est non nul, cela signifie qu'une partie de f « vibre » à la pulsation $n\omega$. La fonction f est ainsi la « somme » de toutes les vibrations aux harmoniques $n\omega$ pour lesquelles a_n ou b_n sont différents de zéro.

2) Exemples classiques

On va considérer une première fonction périodiques de période 2π ci-dessous.

On étudie d'abord ce cas en détail (je vous guide…).



(i) $f(t) = \begin{cases} 1 & pour \quad 0 \leq t < \pi \\ -1 & pour \quad \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$

a) Montrons que $a_n = 0$ pour tout n.
Il est clair que a_0 est nul car c'est la valeur moyenne de f (vérifiez-le !).
De plus, pour $n \geq 1$: $a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(n\omega t)\, dt$ avec $\omega = 1$
Donc : $a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \ \cos(nt)\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1 \ \cos(nt)\, dt \right)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} \sin(nt)\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n} \sin(nt)\right]_{\pi}^{2\pi} \right) = \frac{1}{n\pi} \left(\sin(n\pi) - 0 - \sin(n2\pi) + \sin(n\pi)\right)$$

Au final : $a_n = 0$

Remarquons que la fonction f est impaire. Donc, l'intégrale menée sur un intervalle de longueur 2π centré en 0 donnera un résultat nul. La prochaine fois, on ne fera pas ce genre de calcul.

b) Montrez que : $b_n = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))$

Poursuivons : $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$

Donc : $b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1 \sin(nt)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1 \sin(nt)\,dt\right)$

$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} - \left[\frac{-1}{n}\cos(nt)\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{n\pi}\,(-\cos(n\pi) + 1 + \cos(n2\pi) - \cos(n\pi))$

Avec $\cos(n2\pi) = 1$, il reste bien : $b_n = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))$

c) En déduire b_n lorsque n est pair, puis impair.

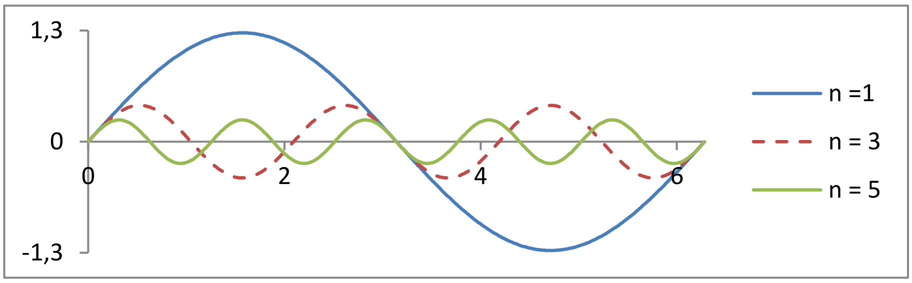
Lorsque n est pair, $\cos(n\pi) = 1$. Ainsi, on obtient $b_n = 0$.

Lorsque n est impair, $\cos(n\pi) = -1$. Ainsi, on obtient $b_n = \frac{4}{n\pi}$.

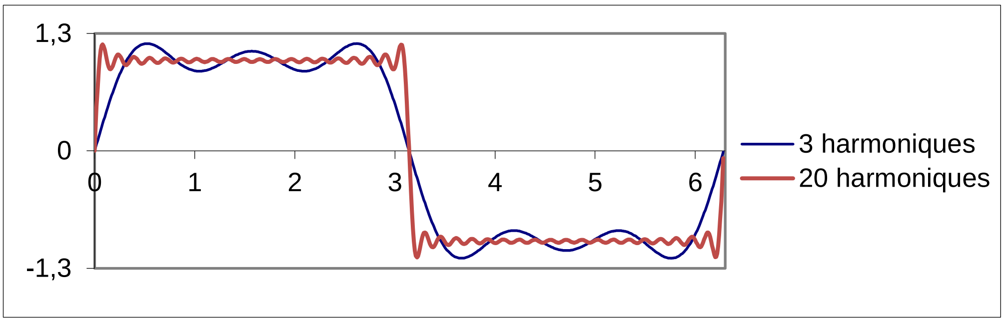
d) Donnez alors la série de Fourier de f.

La série de Fourier de f est donc : $\sum_{\substack{n=1 \\ n\ impair}}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\sin(nt)$ ce qui peut encore s'écrire en posant $n = 2p + 1$: $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi}\sin((2p+1)t)$

On peut voir ci-dessous les harmoniques (les fonctions de base en sinus affectées de leur coefficient) d'ordre 1, d'ordre 3 et d'ordre 5.



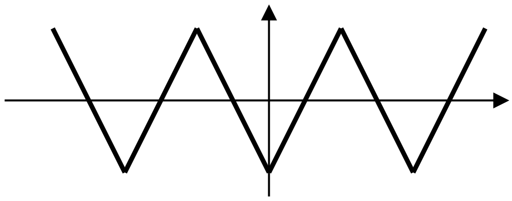
Plus l'ordre d'une harmonique augmente, plus elle oscille vite. Les premières assurent le rapprochement grossier avec la forme de f, et petit à petit, les harmoniques plus hautes affinent le tracé dans les petits détails.



En sommant les trois premières harmoniques (d'ordre 1, 3 et 5), on obtient une courbe qui commence juste à ressembler à f. Ensuite, la ressemblance devient forte avec les 20 premières harmoniques ! On sent qu'il reste une petite difficulté près du passage de 1 à –1 dont en reparlera….

Maintenant, à vous de suivre la méthode avec le deuxième exemple suivant si vous êtes déjà très à l'aise avec le calcul intégral, car il vous faudra faire des intégrations par parties délicates. Sinon, regardez simplement les graphiques liés à cette fonction. Vous pourrez revenir vers ce cas plus tard.

(ii) $f(t) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}t - 1 & pour \quad -\pi \le t < 0 \\ \frac{2}{\pi}t - 1 & pour \quad 0 \le t < \pi \end{cases}$

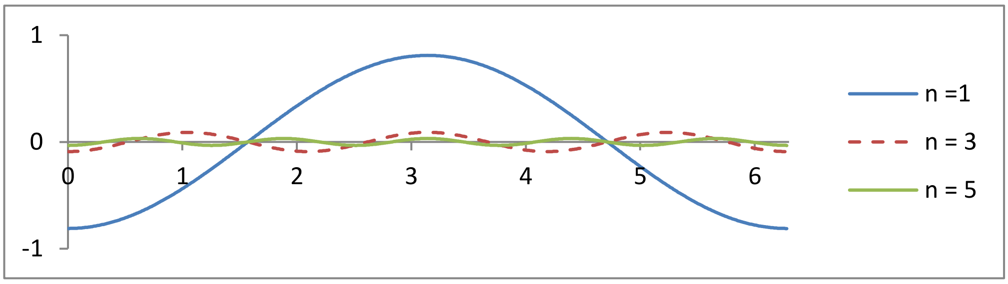


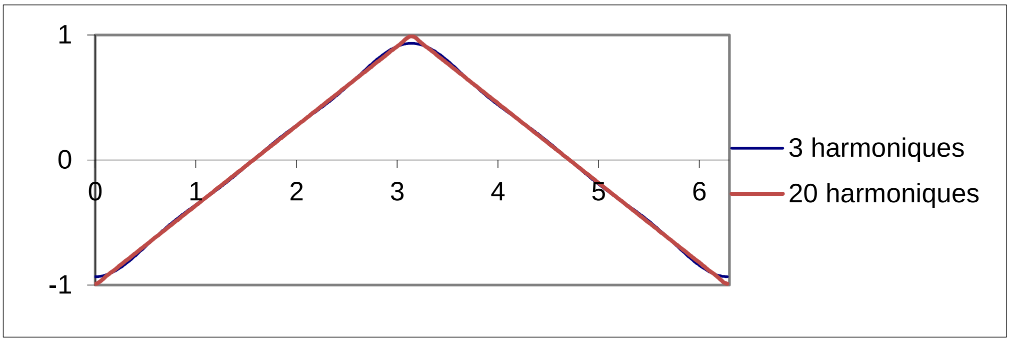
a) Montrez que $b_n = 0$ pour tout n.

b) Calculez a_o. Montrez ensuite que $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - 1)$

c) En déduire a_n lorsque n est pair puis impair.

d) Montrez enfin que la série de Fourier de f est $-\frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos((2p+1)t)$





3) Commentaires

A l'appui de ces deux exemples, il faut souligner les points importants qui suivent :

- Lorsque f est une fonction paire, on a : $b_n = 0$ pour tout n.
- Lorsque f est une fonction impaire, on a : $a_n = 0$ pour tout n.

Cela permet de gagner du temps…

- Lorsque la fonction f est continue, les coefficients de Fourier sont du type $\frac{k}{n^2}$
- Lorsque f présente une discontinuité, les coefficients de Fourier sont du type $\frac{k}{n}$

$\Rightarrow$ Dans tous les cas, on constate que les coefficients de Fourier tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini. C'est d'ailleurs une condition nécessaire pour que la série converge.

4) Convergences

Le développement en série de Fourier d'une fonction f donne une somme infinie de fonctions trigonométriques. Il est bien évident qu'il est impossible en pratique de calculer ce genre de somme…

Donc, on doit se contenter de sommes partielles du type :

$$f(t) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Plus N est grand, meilleure est l'approximation de la fonction f.

De plus, cette convergence se fait d'autant mieux que les coefficients de Fourier décroissent vite. Ainsi, une fonction continue, dont les a_n et b_n sont en $\frac{1}{n^2}$, sera plus facilement approchée qu'une fonction discontinue.

En particulier, lorsque f est discontinue, elle est moins bien approchée près de la discontinuité (phénomène de Gibbs).

Les problèmes de convergence ont été étudiés par **Dirichlet**. On lui doit le théorème :

Soit une fonction f périodique, continue par morceaux, de classe C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge simplement vers une fonction $\tilde{f}$ définie par : $\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

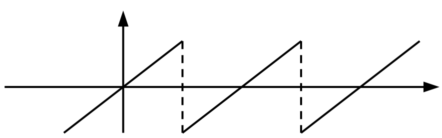
Info : $f(x^+)$ est la valeur de f juste à droite de x (en x + 0,0001 par exemple) et $f(x^-)$ est la valeur de f juste à gauche de x (en x – 0,0001 par exemple).
Ainsi, lorsque f est continue en x, la valeur de $\tilde{f}(x)$ est simplement $f(x)$.

<u>Application au calcul de sommes infinies :</u>
Avec la formule précédente, on est capable de donner le résultat d'une somme infinie de termes en remplaçant t par une valeur bien choisie. Reprenons le cas de notre fonction étudiée au cas (i). Sa série de Fourier était : $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)t)$.
En $\frac{\pi}{2}$, la fonction vaut 1, on peut donc remplacer t par 1 et obtenir : $1 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)\frac{\pi}{2})$
Les sinus sont alternativement 1 et –1 ce qui donne finalement : $1 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} (-1)^p$
Au final, on obtient la jolie relation : $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} (-1)^p = 1$ que l'on peut encore écrire sous la forme plus esthétique : $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}$

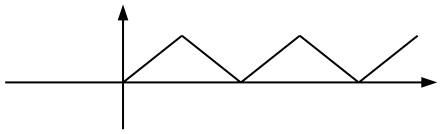
Remarque pour les experts en « séries de fonctions » : Si f est continue, la série de Fourier de f converge normalement vers f. Cette convergence entraîne alors la fameuse convergence uniforme.

<u>ex :</u> (i) f est continue par morceaux.

La série de Fourier converge simplement.



(ii) f est continue <u>et</u> dérivable par morceaux.



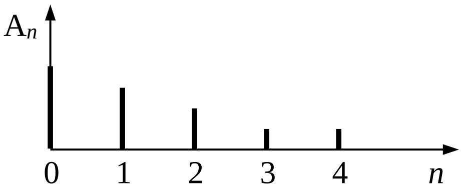
La série de Fourier converge uniformément.

<u>5) Spectre de Fourier</u>

Lorsque l'on analyse une fonction, on peut la représenter dans l'espace des fréquences, pour savoir quelles sont les harmoniques les plus importantes.

Pour cela, remarquons que : $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t + \varphi)$
avec $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ qui s'appelle l'amplitude de l'harmonique de rang n.

On représente alors le spectre de Fourier de f par le graphique ci-dessous :



On dit aussi : spectre de puissance

On peut développer ici une analogie avec la modélisation d'un signal électrique sous la forme d'une fonction périodique f de période T.

La puissance du signal est une grandeur qui se calcule selon : $P = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,dt$

En partant de la décomposition de Fourier de f, on peut montrer que :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$$

Formule de Parseval

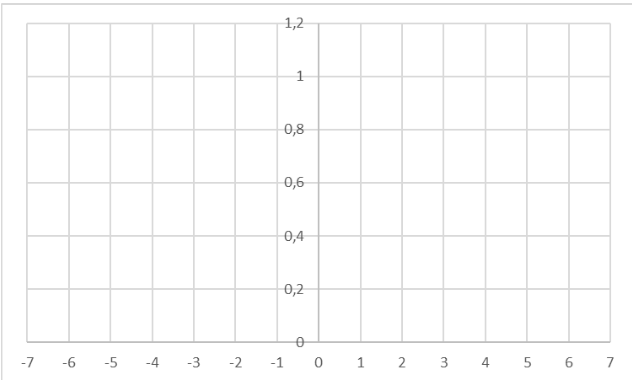
Ainsi, la puissance d'un signal peut se calculer à partir des coefficients de Fourier. Cette puissance est la somme de la puissance de toutes les harmoniques.

Exercice de base guidé

I On considère ici une fonction f de période 2π définie selon :

f est paire ; $f(x) = \begin{cases} 1 & sur\ \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & sur\ \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[\end{cases}$

1) Représentez la courbe représentative C_f de cette fonction sur $[-2\pi; 2\pi]$.



2) Calculez les coefficients a_n avec soin. Si besoin, séparez les différents cas avec des formules adaptées pour chaque cas. En particulier, vérifier que les a_{2p} sont nuls excepté a_0. Montrez aussi : $a_{2p+1} = \frac{2}{(2p+1)\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

3) En déduire les relations : $a_{4p+1} = \frac{2}{(4p+1)\pi}$ et $a_{4p+3} = \frac{-2}{(4p+1)\pi}$ (Conseil : utilisez un cercle trigonométrique pour bien voir ce qui se passe…).
4) Vérifiez que les coefficients b_n sont tous nuls. (Tristesse : « Ils sont tous nuls ! »)
5) En déduire l'expression de la série de Fourier de notre fonction.
6) En utilisant Excel, tracez la somme partielle $a_0 + \sum_{n=1}^{11} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ et la comparer avec la fonction de départ sur l'intervalle $[-3{,}1; 3{,}1]$. Prendre un point tous les 0,1 en abscisse. Que peut-on observer ?
7) Bonus pour *les plus en forme* : En utilisant une valeur bien choisie de *t*, calculez la somme $\sum_{\substack{n=1 \\ n\ impair}}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$

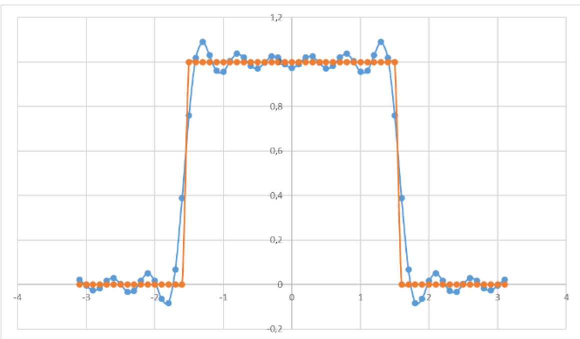
Elément de vérification de vos résultats :

5) $\tilde{f}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4p+1} \cos((4p+1)t) - \frac{1}{4p+3} \cos\big((4p+3)t\big) \right)$

Ou aussi :

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n\ impair}}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)t) - \frac{1}{2n+1} \cos\big((2n+1)t\big) \right)$$

6)



Le fameux phénomène de Gibbs est bien visible à nouveau…

7) En prenant $t = 0$, on peut obtenir avec $f(0) = 1$: $\sum_{\substack{n=1 \\ impair}}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{\pi}{8}$