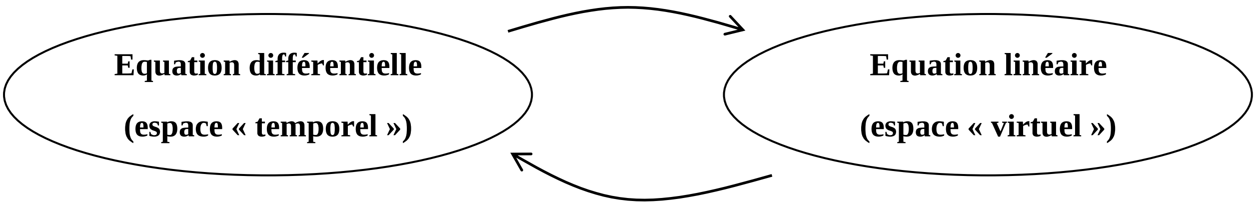
Transformée de Laplace

I Introduction

En mathématiques, certains problèmes sont si « *problématiques* » qu'il est presque impossible d'obtenir une solution… ou bien, au prix de calculs pénibles. Une astuce consiste à utiliser un calcul « artificiel », n'ayant apparemment aucune réalité… mais qui finalement permet de trouver le résultat cherché.

Exemples : les nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie (le célèbre pentagone régulier) ou pour simplifier des calculs « impossibles » (la série $\sum_{k=1}^{n} \cos(k\omega)$ par exemple) ou bien encore pour chercher les solutions de certaines équations différentielles ; les matrices pour la résolution des systèmes d'équations linéaires à *n* inconnues…

Nous allons ici étudier une méthode permettant la résolution d'équations différentielles très « délicates ». Elle consiste à transformer une équation différentielle en une équation linéaire plus simple à résoudre, pour finalement revenir au problème de départ avec la solution. Le schéma ci-dessous rend compte de la démarche :



Le problème est transposé dans un espace virtuel où les calculs sont plus simples. Cette méthode, développée par l'anglais Oliver Heaviside (1850-1925) sous le nom de calcul opérationnel (vers 1885), consiste à remplacer la dérivation par une multiplication. Il travailla par ailleurs sur l'électromagnétisme.

Enfin, le français Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) a introduit la notion de transformée de Laplace pour caractériser diverses lois de probabilité dans sa « *Théorie analytique des probabilités* ».
Cet outil fut utilisé plus tard dans un but complètement différent… afin de démontrer théoriquement la justesse de l'approche de Heaviside.

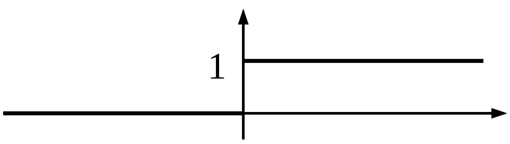
II Définitions - Propriétés

1) Fonction causale

Une fonction f est dite causale si $f(t) = 0$ pour tout t strictement négatif.

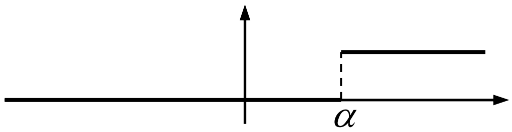
La fonction échelon $\boldsymbol{u(t)}$, ou **fonction de Heaviside** en est l'exemple de base :

$$\begin{cases} u(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ u(t) = 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



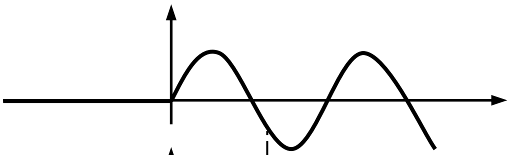
Par translation de la fonction $u(t)$, on peut définir la fonction $u(t-\alpha)$ par :

$$\begin{cases} u(t-\alpha) = 0 \ \text{ pour } \ t < \alpha \\ u(t-\alpha) = 1 \ \text{ pour } \ t \geq \alpha \end{cases}$$

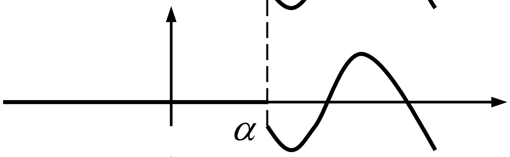


On peut ensuite utiliser ces fonctions pour définir d'autres fonctions causales.

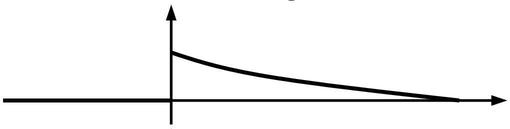
Exemples : $f(t) = u(t)\sin(t)$



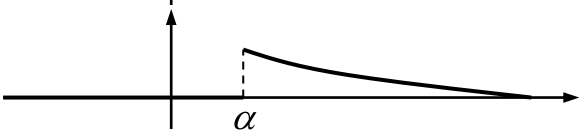
$g(t) = u(t-\alpha)\sin(t)$



$h(t) = u(t)\,\mathrm{e}^{-t}$



$i(t) = u(t-\alpha)\,\mathrm{e}^{-(t-\alpha)}$



i est la translatée de *h*

Par la suite, la notation utilisée pour les fonctions temporelles sous-entendra des fonctions causales : « Soit $f(t) = \cos(t)$ » est « Soit $f(t) = \cos(t)\,u(t)$ ».

En revanche, on doit noter explicitement « $u(t-\alpha)\,f(t-\alpha)$ » pour la translatée de f.

2) Définition de la transformée de Laplace   *« Passons dans l'espace virtuel »*

Soit une fonction causale f. La transformée de Laplace de f est la fonction définie par :
$\mathrm{F(p)} = L\,[\,f(t)\,] = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-\mathrm{p}t}\, \mathrm{d}t$ où p est un réel

Calculons à présent la transformée de Laplace d'une fonction simple.

$f(t) = u(t)$ $\mathrm{F(p)} = L\,[\,f(t)\,] = \int_0^{+\infty} \dots\; e^{-\mathrm{p}t}\,\mathrm{d}t$

Or $\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} e^{-\mathrm{p}t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\mathrm{p}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{p}t}\right]_0^{\mathrm{A}} = \frac{1}{\mathrm{p}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{p\,A}}\right)$ Et : $\displaystyle\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{p}}\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{pA}}\right) = \frac{1}{\mathrm{p}}$

Donc, $\mathrm{F(p)} = \dfrac{1}{\mathrm{p}}$ pour $\mathrm{p} > 0$

3) Existence de F(p)

F(p) existe lorsque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-\mathrm{p}t}\,\mathrm{d}t$ converge. Dans ce cours, ce sera le cas.
Cependant, certaines transformées de Laplace ne seront valides que pour certaines valeurs de p. La condition de validité devrait alors être précisée.

4) Linéarité

Si l'on a : $f(t) = g(t) + h(t)$ où g et h ont des transformées notées G(p) et H(p), alors :

$$F(p) = L\,[\,g(t) + h(t)\,] = L\,[\,g(t)\,] + L\,[\,h(t)\,] = G(p) + H(p)$$

En général, pour tout réel α : $L\,[\alpha\, g(t) + h(t)] = \alpha\, L\,[\,g(t)\,] + L\,[\,h(t)\,] = \alpha\, G(p) + H(p)$

5) *Exercice* : transformées des exponentielles

Soit $f(t) = e^{-a\,t}$ Au boulot ! **Montrez** : $F(p) = \dfrac{1}{p+a}$ (pour $p > -a$)

En déduire (*très simplement, sans calcul !*) : $L\,[\,e^{i\omega\, t}\,]$ puis $L\,[\,e^{-i\omega\, t}\,]$
Donnez alors les transformées de Laplace des fonctions $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ en utilisant les formules d'Euler vues dans le cours sur les complexes (en harmonisation…).

6) Transformée de $f(t-a)\,u(t-a)$ (Théorème du retard)

La translatée de f, est une fonction notée $f(t-a)\,u(t-a)$, souvent notée simplement $f(t-a)$.
La transformée de Laplace de $u(t-a)\,f(t-a)$ est calculée selon :

$$L\,[f(t-a)\,u(t-a)\,] = \int_0^{+\infty} u(t-a)\, f(t-a)\, e^{-p\,t}\, dt$$

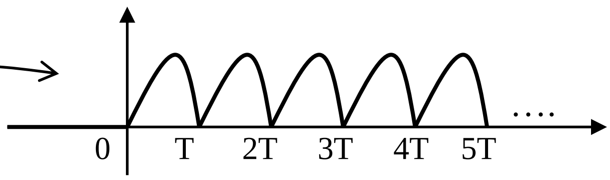
$$= \int_0^{+\infty} u(t)\, f(t)\, e^{-p(t+a)}\, dt \quad \text{(changement de variable } x = t - a\text{)}$$

$$= e^{-p\,a} \int_0^{+\infty} u(t)\, f(t)\, e^{-p\,t}\, dt \;=\; e^{-p\,a}\; L\,[\,f(t)\,u(t)\,]$$

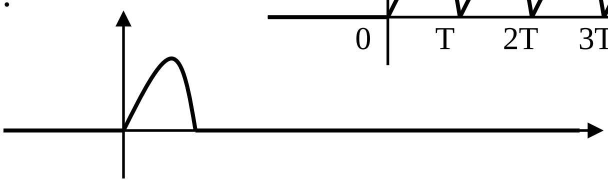
On note finalement : $L\,[\,f(t-a)\,u(t-a)\,] \;=\; e^{-p\,a}\; L\,[\,f(t)\,u(t)\,] \;= e^{-p\,a}\; F(p)$

Application aux fonctions périodiques

Soit la fonction f :



Soit f_o :



La fonction f est « fabriquée » avec les fonctions : f_o , $f_o(t-T)\,u(t-T)$, $f_o(t-2T)\,u(t-2T)$ …

Alors, on peut écrire : $f(t) = f_o + f_o(t-T)\,u(t-T) + f_o(t-2T)\,u(t-2T) + \ldots$

Ainsi : $F(p) = F_o(p) + e^{-pT}\, F_o(p) + e^{-p2T}\, F_o(p) + \ldots = \dfrac{1}{1-e^{-pT}}\, F_o(p)$ (si $p > 0$)

7) Changement d'échelle : fonction $f(at)$

On peut montrer que la transformée de la fonction $f(at)$ (où $a > 0$) est exprimée à partir de la transformée de Laplace F(p) de f selon : $L\,[f(at)] \;=\; \dfrac{1}{a}\, F\!\left(\dfrac{p}{a}\right)$

8) Transformée d'une dérivée

Les équations différentielles comportent les dérivées d'une fonction, il faut donc connaître la transformée de Laplace de la fonction $f'(t)$. $L[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-pt}\, dt$

On effectue une intégration par parties en posant : $u' = f'(t)$ $v = e^{-pt}$

donc : $u = f(t)$ $v' = -p\, e^{-pt}$

Ainsi :

$$L[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-pt}\, dt = \left[f(t)\, e^{-pt} \right]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = p\,F(p) - f(0^+)$$

Donc : $\underline{L[f'(t)] = p\,F(p) - f(0^+)}$

Ainsi, lorsque la fonction f a une valeur nulle pour $t = 0^+$, la formule montre que la transformée de Laplace de la dérivée est liée à F(p) par le coefficient multiplicatif p.

De même, on démontre : $L[f''(t)] = p^2\,F(p) - p\,f(0^+) - f'(0^+)$

9) Transformée d'une primitive

Dans certaines équations différentielles, on a $f(t)$, sa dérivée $f'(t)$, mais en plus sa primitive notée sous la forme d'une intégrale dépendante du temps t : $\int_0^t f(v)\, dv$

On utilise alors le résultat suivant : $L\left[\int_0^t f(v)\, dv\right] = \frac{1}{p} F(p)$

La transformée de la primitive de f est la transformée de f divisée par le facteur p.

Ainsi, la dérivation et l'intégration sont transformées dans cet espace virtuel en multiplication par p et en division par p.

III Dictionnaire des transformées usuelles

En pratique, on utilise le tableau des transformées usuelles ci-dessous.

Fonctions	**Transformées de Laplace**
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$t^n\, u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at}\, u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$\sin(\omega t)\, u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)\, u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

$f\,(t)$	F(p)
$f\,(at) \qquad a > 0$	$\dfrac{1}{a}\ \mathrm{F}\left(\dfrac{\mathrm{p}}{a}\right)$
$e^{-a\,t}\,f\,(t)\,u(t)$	$\mathrm{F}(\mathrm{p}+a)$
$f\,(t-\mathrm{T})\,u(t-\mathrm{T})$	$e^{-\mathrm{T\,p}}\ \mathrm{F}(\mathrm{p})$
$f\,'(t)\,u(t)$	$\mathrm{p\,F(p)} - f\,(0^+)$
$f\,''(t)\,u(t)$	$\mathrm{p}^2\,\mathrm{F(p)} - \mathrm{p}\,f\,(0^+) - f\,'(0^+)$
$t\,f\,(t)\,u(t)$	$-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dp}}(\mathrm{F(p)}) = -\,\mathrm{F'(p)}$
$\dfrac{f\,(t)}{t}\ u(t)$	$\displaystyle\int_p^{+\infty} \mathrm{F}(v)\,\mathrm{d}v$
$\displaystyle\int_0^t f\,(v)\,\mathrm{d}v\ \ u(t)$	$\dfrac{1}{\mathrm{p}}\ \mathrm{F(p)}$
f périodique de période T	$\dfrac{1}{1-e^{-\mathrm{pT}}}\ \mathrm{F_o(p)}$ où $\mathrm{F_o(p)} = \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} e^{-\mathrm{p}\,t}\ f\,(t)\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle\int_0^t f\,(v)\ g(t-v)\ \mathrm{d}v\ \ u(t)$ produit de convolution	$\mathrm{F(p)\ G(p)}$

On admet que le tableau peut être utilisé dans **le sens inverse**. Ainsi, une fonction de l'espace virtuel (fonction de p) admet une fonction de t de l'espace temporel.

Une telle démarche s'appelle **la recherche de l'original**. On note : $L^{-1}\,[\,\mathrm{F(p)}\,] = f\,(t)$

Exemples :

(i) Soit $\mathrm{F(p)} = \dfrac{1}{\mathrm{p}+2}$ on regarde la bonne ligne et… $f\,(t) = \mathrm{e}^{-2\,t}\,u(t)$

(ii) Soit $\mathrm{G(p)} = \dfrac{1}{3\mathrm{p}+1}$ on écrit : $\mathrm{G(p)} = \dfrac{1}{3(\mathrm{p}+\frac{1}{3})}$ d'où : $g(t) = \dfrac{1}{3}\ e^{-\frac{1}{3}t}\ u(t)$

IV Décomposition en éléments simples

On considère la fonction : $\mathrm{F(p)} = \dfrac{1}{2\mathrm{p}^2+\mathrm{p}+7}$

Un rapide examen du tableau des transformées usuelles montre que ce type de fonction ne s'y trouve pas… Que fait-on alors ??

La méthode réside dans le fait qu'une fonction de type rationnelle peut s'écrire sous une autre forme, qui permettra de trouver plus facilement l'original de F(p).
Nous allons donc écrire une fonction rationnelle sous une autre forme.

1) Situation « préparée »

Soit $F(p) = \frac{1}{p^2+p}$ On donne l'infô : « F(p) peut s'écrire selon : $F(p) = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1}$ »

Dans ce cas, il reste à trouver les coefficients *a* et *b* en procédant par identification…

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} = \frac{a(p+1) + bp}{p(p+1)} = \frac{(a+b)p + a}{p^2 + p} \quad \text{d'où } a + b = 0 \text{ et } a = 1$$

Alors, on obtient : $F(p) = \frac{1}{p} + \frac{-1}{p+1}$ et l'original est : $f(t) = u(t) - e^{-t}\, u(t)$

2) Situation générale

Pour trouver la forme de F(p) permettant l'utilisation du tableau des transformées usuelles, il est nécessaire de suivre les étapes suivantes…

a) Transformation du dénominateur : factorisation / forme canonique

(i) Soit $F(p) = \frac{1}{p^2+p-6}$

On remarque que $p^2 + p - 6 = 0$ admet les solutions 2 et –3 (facile…)
Alors on écrit la forme factorisée : $p^2 + p - 6 = (p-2)(p+3)$. D'où $F(p) = \frac{1}{(p-2)(p+3)}$

(ii) Soit $G(p) = \frac{1}{2p^3+2p}$ on factorise au mieux : $2p^3 + 2p = 2(p^3+p) = 2p\,(p^2+1)$

avec $p^2 + 1$ qui ne peut être factorisé dans *R*. D'où $G(p) = \frac{1}{2p(p^2+1)}$

(iii) Parfois, il n'y a pas de factorisation dans *R*, mais on peut utiliser la *forme canonique*.
Soit $F(p) = \frac{1}{p^2+2p+4}$ $p^2 + 2p + 4 = 0$ n'admet pas de solution réelle.

On écrit : $p^2 + 2p + 4 = (p+1)^2 - 1 + 4 = (p+1)^2 + 3$ D'où $F(p) = \frac{1}{(p+1)^2+3}$

b) La nouvelle forme de la fonction

- Lorsque : $F(p) = \frac{1}{(p-2)(p+3)}$ (dénominateur = produit de facteurs du 1er degré)

  On écrit F sous la forme d'une somme de deux fractions :
  $\frac{1}{(p-2)(p+3)} = \frac{a}{p-2} + \frac{b}{p+3}$ il reste à trouver les valeurs de *a* et *b*…
  Finalement : $F(p) = \frac{1}{(p-2)(p+3)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+3}\right)$
  Puis : $f(t) = \frac{1}{5}\left[\, e^{2t}\, u(t) - e^{-3t}\, u(t) \,\right]$

- Lorsque la fraction est : $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p^2+3)}$

(dénominateur = produit de termes du 1er et du 2ème degré non factorisable dans *R*)
On écrit F sous la forme d'une somme deux fractions :

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+3)} = \frac{a}{p+1} + \frac{bp + c}{p^2+3}$$ il reste à trouver les valeurs de *a*, *b* et *c*

Finalement, on obtient : $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p^2+3)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{-p+1}{p^2+3}\right)$

On écrit alors (en pensant au tableau…) la nouvelle forme :

$$F(p) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{p}{p^2+3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{p^2+3}\right)$$

Alors, on trouve : $f(t) = \dfrac{1}{4}\left[\, e^{-t}\, u(t) - \cos(\sqrt{3}\,t)\, u(t) + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}\,t)\, u(t) \,\right]$

- **En général** :

$$F(p) = \frac{\text{numérateur}}{(\text{facteur1})(\text{facteur2})(\text{facteur3})\ldots} = \frac{H1}{\text{facteur1}} + \frac{H2}{\text{facteur2}} + \frac{Hi}{\text{facteur i}} + \ldots$$

avec : Hi | du type *constante* lorsque (facteur i) = p + k
du type *a* p + *b* lorsque (facteur i) = $p^2 + r$ <u>ou</u> $p^2 + r\,p + q$
(non factorisable dans *R*)

3) Exemples

(i) Soit $F(p) = \dfrac{2p+1}{p^2-1}$ on a : $p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$

Donc : $F(p) = \dfrac{a}{p+1} + \dfrac{b}{p-1}$ … On obtient : $F(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{3}{p-1}\right)$

Ainsi, on obtient : $f(t) = \dfrac{1}{2}\left[\, e^{-t}\, u(t) + 3\, e^{t}\, u(t) \,\right]$

(ii) Soit $G(p) = \dfrac{3p-1}{(p^2+1)(p^2+4)}$ On écrit : $G(p) = \dfrac{ap + b}{p^2+1} + \dfrac{cp + d}{p^2+4}$

On trouve finalement : $G(p) = \dfrac{p - \frac{1}{3}}{p^2+1} + \dfrac{-p + \frac{1}{3}}{p^2+4}$

Ainsi, on écrit : $G(p) = \dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{p}{p^2+4} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{p^2+4}$

On trouve : $g(t) = \cos(t)\, u(t) - \dfrac{1}{3} \sin(t)\, u(t) - \cos(2t)\, u(t) + \dfrac{1}{6} \sin(2t)\, u(t)$

(iii) Soit $K(p) = \dfrac{1}{p^2-2p+4}$ On écrit : $p^2-2p+4 = (p-1)^2 + 3$ (forme canonique)

alors : $K(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2+3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\dfrac{\sqrt{3}}{(p-1)^2+3}$ K(p) est du type $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Et aussi du type $F(p+a)$ avec $a = -1$. D'où, $k(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, e^t \sin(\sqrt{3}\, t)\, u(t)$

Remarque pour les *experts* en calcul dans *R* :

On peut travailler dans le corps des nombres complexes pour traiter cet exemple.
On factorise p^2-2p+4 en cherchant ses racines complexes.
On a alors : $p^2-2p+4 = [p-(1-i\sqrt{3})]\,[p-(1+i\sqrt{3})]$

K(p) est de la forme : $K(p) = \dfrac{a}{p-(1-i\sqrt{3})} + \dfrac{b}{p-(1+i\sqrt{3})}$ On cherche ensuite a et b.

On réduit au même dénominateur : $K(p) = \dfrac{(a+b)p - (a+b) + i\sqrt{3}\,(-a+b)}{p^2-2p+4}$

Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} a + b = 0 & \text{(partie liée au coefficient p)} \\ -(a+b) + i\sqrt{3}\,(-a+b) = 1 & \text{(partie constante)} \end{cases}$$

On obtient finalement : $K(p) = \dfrac{1}{2i\sqrt{3}}\left(\dfrac{-1}{p-(1-i\sqrt{3})} + \dfrac{1}{p-(1+i\sqrt{3})}\right)$

D'où : $k(t) = \dfrac{1}{2i\sqrt{3}}\left(-e^{(1-i\sqrt{3})t}\, u(t) + e^{(1+i\sqrt{3})t}\, u(t)\right) = \dfrac{1}{2i\sqrt{3}}\, e^t \left(-e^{-i\sqrt{3}t}\, u(t) + e^{i\sqrt{3}t}\, u(t)\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, e^t \sin(\sqrt{3}\, t)\, u(t)$

Au final, peu importe la méthode. Le principal c'est d'être à l'aise avec celle que vous utilisez…

Encore une remarque : pour trouver les coefficients de l'expression d'une décomposition en éléments simples, on peut utiliser des astuces facilitant les calculs.

Exemple : si la décomposition comporte trois termes du type $\dfrac{a}{p+k}$, il faut déterminer trois constantes à l'aide d'un système de trois équations à trois inconnues…

Pour éviter ce travail, on peut procéder comme sur l'exemple suivant.

Soit $F(p) = \dfrac{p+4}{(p+1)(p-3)(p+2)}$ On sait que : $F(p) = \dfrac{a}{p+1} + \dfrac{b}{p-3} + \dfrac{c}{p+2}$

Alors : $\dfrac{p+4}{(p+1)(p-3)(p+2)} = \dfrac{a}{p+1} + \dfrac{b}{p-3} + \dfrac{c}{p+2}$ (relation ***R***)

* Multiplions $\boldsymbol{R}$ par (p+1) on obtient : $\dfrac{p+4}{(p-3)(p+2)} = a + (p+1)\left(\dfrac{b}{p-3} + \dfrac{c}{p+2}\right)$

alors, en remplaçant p par –1, toute une partie est annulée.

il ne reste plus que : $\dfrac{-1+4}{(-1-3)(-1+2)} = a$ soit $a = -\dfrac{3}{4}$

* En multipliant par (p–3) on a : $\dfrac{p+4}{(p+1)(p+2)} = b + (p-3)\left(\dfrac{a}{(p+1)} + \dfrac{c}{(p+2)}\right)$

alors, en remplaçant p par 3, toute une partie est annulée.

il ne reste plus que : $\dfrac{3+4}{(3+1)(3+2)} = b$ soit $b = \dfrac{7}{20}$ (idem pour c).

Enfin, on peut remplacer directement p par une valeur permettant d'obtenir une relation simple entre les coefficients. Dans notre exemple, en remplaçant p par 0, la relation $\boldsymbol{R}$ se simplifie : $\dfrac{4}{-6} = a + \dfrac{b}{-3} + \dfrac{c}{2}$ d'où : $3c = -4 - 6a + 2b$ puis avec p = 1…

V Application aux équations différentielles

A ce stade, vous savez déterminer la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$. Vous savez aussi, à l'inverse, déterminer l'original d'une fonction F(p). Nous allons donc mettre en application ces méthodes pour résoudre des équations différentielles.

Principe : calculer la transformée de Laplace de chaque membre de l'équation pour ensuite résoudre le problème. Nous gardons à l'esprit que les fonctions sont causales.

1) Equation du type : $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(t)$ avec a, b et c des constantes.

- **$y' + y = t$ avec $y(0^+)$ donnée**

$L[y' + y] = L[t]$ donne : $L[y'] + L[y] = L[t]$

on note alors : $L[y] = Y(p)$ d'où $L[y'] = p\,Y(p) - y(0^+)$

Ainsi : $p\,Y(p) - y(0^+) + Y(p) = \dfrac{1}{p^2}$ C'est-à-dire : $(p+1)\,Y(p) = \dfrac{1}{p^2} + y(0^+)$

Donc : $Y(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)} + \dfrac{1}{p+1}\,y(0^+)$

On écrit ensuite : $\dfrac{1}{p^2(p+1)} = \dfrac{ap+b}{p^2} + \dfrac{c}{p+1} = \ldots = \dfrac{-p+1}{p^2} + \dfrac{1}{p+1}$

Ainsi : $Y(p) = \dfrac{-1}{p} + \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p+1}(1+y(0^+))$ Puis : $y(t) = -u(t) + t\,u(t) + (1+y(0^+))\,e^{-t}\,u(t)$

Donc, sur [0 ; +∞[on obtient : $y(t) = -1 + t + (1 + y(0^+))\,e^{-t}$

Remarque : la transformée de Laplace n'est ici pas avantageuse (c'est un exemple…). Nous verrons par la suite des cas où la transformée de Laplace se rend plus utile.

- $y'' + y' + y = 1$ **avec $y(0^+)$ et $y'(0^+)$ donnés**

après transformation : $(p^2\, Y(p) - p\, y(0^+) - y'(0^+)) + (p\, Y(p) - y(0^+)) + Y(p) = \frac{1}{p}$

On isole Y(p) et on obtient : $Y(p) = \dfrac{1}{p(p^2+p+1)} + \dfrac{py(0^+) + (y(0^+)+y'(0^+))}{p^2+p+1}$

Si l'on nous donne, par exemple, $y(0^+) = 0$ et $y'(0^+) = 0$: $Y(p) = \dfrac{1}{p(p^2+p+1)}$

Ensuite, on écrit Y(p) sous une autre forme …

$Y(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{p+1}{p^2+p+1}$ avec un dénominateur non factorisable dans *R*.

d'où : $Y(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{p+1}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$ enfin, en pensant au tableau des transformées usuelles :

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{p} - \frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Ce qui donne après la transformée inverse :

$$y(t) = u(t) - u(t)\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$$

Ainsi, sur [0 ; +∞[la solution est : $y(t) = 1 - \left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$

2) Equation du type : $a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = f(t)$

Soit l'équation (E) : $\boldsymbol{t\, y'' + (1-t)\, y' = \frac{t^2}{2} - t}$

On voit apparaître un terme délicat : $t\ y''$ qui nécessite une étude préliminaire.

Le tableau donne : $L\,[\, t\, f(t)\,] = -\dfrac{d}{dp}(\, F(p)\,)$

Alors, par analogie : $L\,[\, t\, f'(t)\,] = -\dfrac{d}{dp}(\, p\, F(p) - f(0^+)\,) = -(\, F(p) + p\, F'(p)\,)$

De même : $L\,[\, t\, f''(t)\,] = -\dfrac{d}{dp}(\, p^2\, F(p) - p\, f(0^+) - f'(0^+)\,)$

$= -(\, 2p\, F(p) + p^2\, F'(p) - f(0^+)\,)$

Ainsi, en utilisant ces nouvelles relations, on peut déterminer la transformée de $t\, y''$ et de $t\, y'$. Alors, l'équation de départ (E) est transformée en :

$[\, -2p\, Y(p) - p^2\, Y'(p) + y(0^+)\,] + [\, p\, Y(p) - y(0^+) + Y(p) + p\, Y'(p)\,] = \dfrac{1}{p^3} - \dfrac{1}{p^2}$

Ce qui donne après simplifications : $p\,Y'(p) + Y(p) = \frac{1}{p^3}$ (e)

(c'est une équation différentielle d'ordre 1… donc plus facile que celle de départ)

On résout cette dernière équation avec les méthodes usuelles pour trouver Y(p) :

a) équation homogène : $p\,Y' + Y = 0$ c'est-à-dire $\frac{Y'}{Y} = -\frac{1}{p}$

d'où $\ln(Y) = -\ln(p) + K$ et donc : $Y(p) = \frac{C}{p}$

b) solution particulière (variation de la constante) : Y_p de la forme $\frac{C(p)}{p}$

donc $Y'_p = \frac{C'p - C}{p^2}$ ce qui donne, une fois remis dans (e) :

… $C' = \frac{1}{p^3}$ D'où $C = -\frac{1}{2}\frac{1}{p^2}$ D'où : $Y_p(p) = -\frac{1}{2}\frac{1}{p^3}$

c) finalement la solution de (e) est donnée par : $Y(p) = \frac{C}{p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^3}$

La solution de (E) est l'original de Y(p) : $y(t) = C\,u(t) - \frac{t^2}{4}\,u(t)$

Et en prenant $t = 0$ on obtient : $y(t) = y(0^+)\,u(t) - \frac{t^2}{4}u(t)$

3) <u>Système d'équations différentielles</u>

On considère ici deux fonctions *f* et *g* liées par deux équations différentielles sous la forme d'un système. On cherche alors à déterminer l'expression de *f* et de *g*.

Soit le système suivant : $\begin{cases} f' = f + 5g \\ g' = f - 3g \end{cases}$ avec $f(0) = 1$ et $g(0) = 2$

Il est impossible de résoudre ces équations l'une après l'autre car on a deux inconnues dans chaque équation. On utilise la transformée de Laplace pour le système.

On obtient : $\begin{cases} p\,F(p) - f(0^+) = F(p) + 5\,G(p) \\ p\,G(p) - g(0^+) = F(p) - 3\,G(p) \end{cases}$

Ce qui peut s'écrire : $\begin{cases} (p-1)\,F(p) - 5\,G(p) = f(0^+) = 1 \\ -F(p) + (p+3)\,G(p) = g(0^+) = 2 \end{cases}$

Pour simplifier, on peut écrire F au lieu de F(p)… et G au lieu de G(p)

D'où le système : $\begin{cases} (p-1)\,F - 5\,G = 1 \\ -F + (p+3)\,G = 2 \end{cases}$

On obtient ainsi un système d'équations linéaire que l'on sait résoudre (par combinaisons linéaires ou bien par la méthode de Cramer)…

On obtient : $F(p) = \dfrac{p+13}{p^2+2p-8} = \dfrac{p+13}{(p-2)(p+4)}$ $G(p) = \dfrac{2p-1}{p^2+2p-8} = \dfrac{2p-1}{(p-2)(p+4)}$

On écrit alors : $F(p) = \dfrac{a}{p-2} + \dfrac{b}{p+4}$ qui donne $F(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{p-2} - \dfrac{3}{p+4}\right)$

$G(p) = \dfrac{c}{p-2} + \dfrac{d}{p+4}$ qui donne $G(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-2} + \dfrac{3}{p+4}\right)$

Et finalement : $f(t) = \dfrac{1}{2}\,(\,5\,e^{2t} - 3\,e^{-4t}\,)\,u(t)$ $g(t) = \dfrac{1}{2}\,(\,e^{2t} + 3\,e^{-4t}\,)\,u(t)$

4) Une remarque…

Les solutions trouvées sont par définition des fonctions causales. Néanmoins, on peut regarder si les solutions obtenues sont également valables pour les valeurs négatives de t… En général, c'est le cas. Ainsi, on peut obtenir grâce à cette astuce la solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle ou bien d'un système d'équations différentielles.

5) Equation intégro-différentielle (où Laplace permet de résoudre d'autres situations…)

Une équation intégro-différentielle fait intervenir $y(t)$, une dérivée $y'(t)$ ou bien $y''(t)$ et enfin un terme intégral particulier de la forme : $\int_0^t g(t-u)\,y(u)\,du$. On reconnaît ici un produit de convolution entre une fonction g et une fonction y.

Exemple : Soit : $y'(t) + 5\displaystyle\int_0^t \cos 2(t-u)\,y(u)\,du = 10$ avec $y(0) = 2$

La transformée de Laplace de l'équation donne : $p\,Y(p) - y(0) + 5\,\dfrac{p}{p^2+4}\,Y(p) = \dfrac{10}{p}$

Soit : $Y(p)\,\dfrac{p^3+9p}{p^2+4} = \dfrac{10}{p} + 2 = \dfrac{2p+10}{p}$ Donc : $Y(p) = \dfrac{(p^2+4)(2p+10)}{p(p^3+9p)}$

Ainsi $Y(p) = \dfrac{2p^3+10p^2+8p+40}{p(p^3+9p)}$

On utilise ensuite une autre propriété des décompositions : $\dfrac{G(p)}{p^2} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{p^2}$

Alors, Y(p) est de la forme : $Y(p) = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{p^2} + \dfrac{cp+d}{p^2+9}$

En réduisant au même dénominateur, on est conduit à une identification :

$a + c = 2$; $b + d = 10$; $9\,a = 8$; $9\,b = 40$

On arrive alors à : $Y(p) = \dfrac{8}{9}\dfrac{1}{p} + \dfrac{40}{9}\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{9}\left(10\,\dfrac{p}{p^2+9} + 50\,\dfrac{1}{p^2+9}\right)$

Enfin : $y(t) = \dfrac{1}{9}\left(\,8 + 40\,t + 10\cos 3t + \dfrac{50}{3}\sin 3t\,\right)$