# *Une jolie formule…*

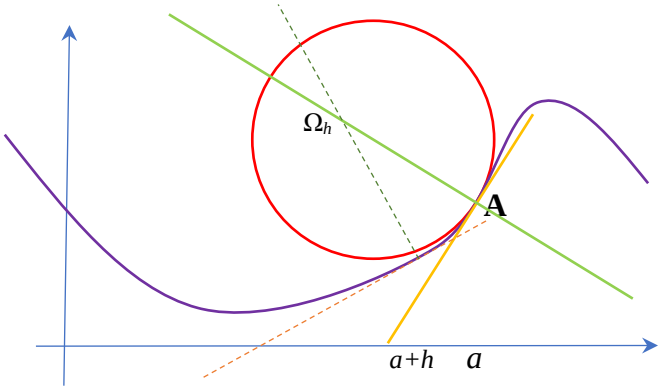
## *Une abominable démonstration !*

Considérons $C_f$ la courbe représentative d'une fonction $f$ de classe $C^2$ sur un intervalle ouvert $U$. En un point A de $U$, d'abscisse $a$, il est possible de calculer le « rayon de courbure » noté $R$ selon : $R = \dfrac{\left(1 + \left(f'(a)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(a)}$ (formule que j'ai trouvé dans un vieux livre de maths).

Pour dire les choses autrement, $R$ est le rayon d'un cercle qui épouserait au mieux $C_f$ au voisinage de A.

Le but de cet exercice est de retrouver cette formule et de la corriger en cas de légère erreur (dans les vieux livres… on ne sait jamais).

On considère le schéma suivant :




On note $T_a$ la tangente à $C_f$ en A (d'abscisse $a$). Droite orange en trait plein.
On note $T_{a+h}$ la tangente à $C_f$ en A' (d'abscisse $a+h$). Droite orange en pointillés.

Remarque : en mathématiques, $h$ peut être un réel négatif !

On note ensuite : $N_a$ la normale associée à $T_a$ passant en A (droite verte, trait plein).
$N_{a+h}$ la normale associée à $T_{a+h}$ passant en A' (en vert et en pointillés).

On suppose que lorsque $h$ tend vers 0, la normale $N_{a+h}$ va croiser la normale $N_a$ en un point noté $\Omega_h$ qui tendra vers un certain point $\Omega$ (le centre du cercle rouge définissant le fameux rayon de courbure ! Ainsi, en notant $R_h = A\Omega_h$ , on pourrait affirmer : $R = \lim\limits_{h\to 0} A\Omega_h$

Cet espoir étant posé, il reste à voir ce qu'il devient dans nos calculs…

1) Déterminez les équations des normales $N_a$ et $N_{a+h}$. Rappel : deux droites de pentes non nulles $p$ et $p'$ sont orthogonales dans un repère orthonormé lorsque $p\,p' = -1$.

Conseils : on peut noter pour certains calculs : $c = f'(a)$ et ensuite vous pourrez aussi poser $d = f''(a)$.

2) Déterminez $x_h$ l'abscisse de $\Omega_h$. Montrez que $x_h$ admet une limite lorsque $h$ tend vers 0.
Conseil : posez astucieusement vos expressions sachant que vous devrez faire tendre $h$ vers 0.

3) Calculez alors le carré de $R_h$ et montrez qu'il admet bien une limite intéressante pour notre propos…