Deux techniques de calcul intégral

Cette fiche est très technique… ne cherchez pas la petite blague habituelle, il n'y en a pas.

I L'intégration par parties IPP

Mais ne serait-ce pas une petite blague ci-dessus en vert ? Hum, c'est louche…

Devant une intégrale du type $I = \int_0^1 (4x+1)\, e^{2x}\, dx$, vous devez vous dire :

- La fonction $f(x) = (4x+1)\, e^{2x}$ n'est pas une forme que l'on trouve dans le tableau des primitives usuelles.
- f se présente comme le produit de deux fonctions : $(4x+1)$ et e^{2x}.

Dans une telle situation, il faut utiliser l'IPP dont la formule est :

$$\boldsymbol{\int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx}$$

Comment poser le travail ? On note sur une feuille blanche :

$u'(x) = e^{2x}$ dont la primitive est : $u(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

$v(x) = 4x+1$ dont la dérivée est : $v'(x) = 4$

Remarque : on *choisit* $v(x) = 4x+1$ car sa dérivée va donner une fonction plus simple. Et c'est cette fonction *plus simple* qui prendra place dans l'intégrale de droite (qui doit être plus simple qu'à gauche !).

Ainsi, on peut appliquer la formule : (puisque : $\int_0^1 (4x+1)\, e^{2x}\, dx = \int_0^1 e^{2x}(4x+1)\, dx$)

$$I = \int_0^1 e^{2x}\,(4x+1)\, dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x}\,(4x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} \times 4\, dx$$

Ainsi : $I = \frac{1}{2}[\, e^{2x}\,(4x+1)\,]_0^1 - 2\int_0^1 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\,(e^2 \times 5 - e^0 \times 1) - 2\left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1$

$I = \frac{1}{2}(5e^2 - 1) - (e^2 - 1)$ Résultat final : $I = \frac{1}{2}(3e^2 + 1)$

Remarques : * Je vous l'avais bien dit, pas la moindre petite blague sur cette page…

* On peut effectuer deux intégrations par parties à la suite, on parle alors de double IPP. Exemple avec $J = \int_0^1 (x^2+3)\, e^{5x}\, dx$. On voit le polynôme qui est de degré 2. Il faudra donc faire deux intégrations pour baisser ce degré deux fois. Essayez : $J =$ ……..

* Si on cherche juste une primitive, on ne met pas les bornes.

II Méthode du changement de variable

On utilise ici une autre formule plus délicate à manipuler :

$$\int_a^b f(u(x))\ u'(x)\,dx \ = \ \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\ du$$

Voici un exemple pour vous montrer de manière détaillée cette technique.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ \ (\sin x + \sin^2 x)\ dx$$

Remarque : on pourrait supposer une invitation à faire une IPP puisque l'on voit un produit. Mais, si on tente notre chance de ce côté, on constate que la situation reste très compliquée à gérer… Après cet essai, on se dit que seul le changement de variable peut nous aider.

La bonne idée, qui vient avec un peu d'expérience, consiste à poser : $u(x) = \sin x$

Remarque : parfois, la bonne idée est donnée sous forme de conseil par le rédacteur de l'exercice.

Si l'on pose $u(x) = \sin x$, alors on obtient $u'(x) = \cos x$

Du coup, on peut écrire I selon : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \ \sin^2 x)\ \cos x\ \ dx$

Ceci, dans le but de « voir » : $(\ u \quad + \quad u^2\ ) \quad u'$

L'intégrale ressemble alors au modèle de la formule, à condition de poser : $f = u + u^2$

La formule donne donc : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \ \sin^2 x)\ \cos x\ \ dx = \int_0^1 u + u^2\ du$

Ceci, avec les nouvelles bornes : $\sin(0) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

Le calcul se termine selon : $I = \int_0^1 u + u^2\ du = \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

Exercices d'application du changement de variable :

1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\ dx$ vous poserez $u = \sin(x)$ Astuce : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2) $J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} dx$ vous poserez $u = e^x$ (vous l'aviez vu !)

(Evidemment, on nous prend pour quoi ici ??)

3) $K = \int_1^e \frac{1}{x\ln(x)+x} dx$ vous poserez $u = \ln(x)$

Correction des exercices 1), 2) et peut-être 3) si j'ai le temps….

1) on utilise donc $u = \sin(x)$ ce qui donne $u' = \cos(x)$

Ainsi, on est convié à écrire : $cos^3x = cos^2x \; cos\, x = (1 - sin^2x)\cos x$ en utilisant au passage l'astuce rappelée dans le texte.

Au final : $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} cos^3x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - sin^2x)\; \cos x\; dx$

La forme est : $(1 - u^2)\, u'$ donc $f(u) = 1 - u^2$

Avec la formule du changement, en utilisant $\sin(0) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{6}) = ½$ on obtient :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - u^2)\, du = \left[u - \frac{1}{3}u^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24}$$

2) Puisqu'on me propose $u = e^x$!!

On obtient avec quelques difficultés (non explicitées ici) la dérivée : $u' = e^x$

Ainsi, on écrit : $J = \int_0^1 \frac{1}{(e^x)^2 + 2e^x + 1}\; e^x\, dx$ on pose alors $f = \frac{1}{u^2 + 2u + 1}$

Avec $u(0) = 1$ et $u(1) = e$, on obtient :

$$J = \int_1^e \frac{1}{u^2 + 2u + 1}\, du = \int_1^e \frac{1}{(u+1)^2}\, du = \left[\frac{-1}{u+1}\right]_1^e = \frac{-1}{e+1} + \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2(e+1)}$$

3) Fatigué…. Je vais dormir car j'ai cours demain…..

Mais bon, comme je pense que ma collègue de Toulouse serait déçue, je peux difficilement ne pas corriger ce petit dernier ! Allez, on y va…

$u = \ln(x)$ donne $u' = \frac{1}{x}$ et là, on voit toute l'astuce : $\frac{1}{x\ln(x) + x} = \frac{1}{x\; (\ln(x) + 1\,)}$

Donc : $K = \int_1^e \frac{1}{x\ln(x) + x} dx = \int_1^e \frac{1}{\ln(x) + 1}\, \frac{1}{x} dx$ forme $f = \frac{1}{u+1}$

Enfin, avec $u(1) = 0$ et $u(e) = 1$: $K = \int_0^1 \frac{1}{u+1}\, du = [\ln(u + 1)]_0^1 = \ln(2)$

Bonne nuit !!!