Inverser une matrice 3×3

I Déterminant

On considère ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Question : « A admet-elle une matrice inverse ? ».

La condition nécessaire et suffisante est : $\det(A) \neq 0$.

Encore faut-il savoir comment calculer un déterminant pour une telle matrice. Je présente ici la méthode du mathématicien français Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861).

D'abord, le déterminant de A se note avec des barres : $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Pour effectuer son calcul, on recopie ses deux premières lignes juste en-dessous selon :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}$$

première diagonale rouge : $1 \times 1 \times 1 = 1$

deuxième diagonale rouge : $-1 \times 2 \times 2 = -4$

…..

Il faut faire les produits sur les diagonales rouges pour en faire la somme : 1 – 4 + 0 = **– 3**

Puis, on fait les produits sur les diagonales vertes pour en faire la somme : $0 + 2 - 2 = \mathbf{0}$

Enfin : $\det(A) = (\mathbf{-3}) - (\mathbf{0}) = -3$ (total diagonales rouges – total diagonales vertes)

Conclusion : la matrice A est bien inversible puisque son déterminant est non nul.

II Matrice inverse

On va calculer une matrice notée A^{-1} telle que : $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_3$

où I_3 est la matrice identité de taille 3×3.

On utilise dans ce « point info » la formule : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \ {}^{t}Com\ A$

On sait déjà calculer le déterminant, il reste à savoir calculer $Com\ A$, la comatrice de A. Il restera ensuite à en prendre la transposée.

La comatrice de A est « la matrice des cofacteurs de A ».

Pour préparer le terrain, on peut noter : $Com\ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}$

Le coefficient a peut être noté $c_{1,1}$ car c'est le cofacteur situé à l'intersection de la ligne 1 et de la colonne 1. De même, le coefficient b peut être noté $c_{1,2}$ car c'est le cofacteur situé à l'intersection de la ligne 1 et de la colonne 2.

Nota bene : on lit $c_{i,j}$ « coefficient situé à la ligne i et à la colonne j ». On doit toujours penser dans cet ordre : ligne puis colonne.

Formule générale : $c_{i,j} = (-1)^{i+j}\ M_{i,j}$ avec $M_{i,j}$ = « mineur i, j »

Enfin, avec : $M_{i,j}$ = déterminant calculé en enlevant de A sa ligne i et sa colonne j.

<u>Exemple</u> : calcul du coefficient $c_{2,1}$.

On part de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et on « élimine » la ligne 2 et la colonne 1.

Visuellement, on peut écrire : $\begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 & 2 \\ \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Il reste à calculer le déterminant des chiffres restants pour obtenir : $M_{2,1} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Au final, on obtient : $c_{2,1} = (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times -2 = 2$

En espérant que cela soit clair, essayez de vérifier deux ou trois coefficients dans le résultat que je vous propose : $Com\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Remarque :</u> le facteur $(-1)^{i+j}$ peut se gérer en partant en haut à gauche de la matrice et en pensant à alterner le signe en passant d'une case à l'autre.

Finalement, la matrice inverse de A est donc : $A^{-1} = \frac{1}{-3}\ {}^{t}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Ce qui donne enfin, après avoir « transposé » cette matrice (en échangeant le rôle des lignes et des colonnes) : $A^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Remarque : on peut vérifier rapidement son calcul en posant le départ du produit $A\ A^{-1}$ qui devra donner la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérification assez facile et très instructive…

Je le fais pour cet exemple : $A\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Soit : $A\ A^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1+2-4 & 2+2-4 & \ldots \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

On constate que la première ligne sera bien 1 0 0 comme on l'espérait (n'oubliez pas pour cela le coefficient $\frac{-1}{3}$ devant la matrice !). On peut être rassuré quant au résultat ! Mais on peut aussi vérifier les autres coefficients (ce qui m'a permis de trouver une petite erreur de calcul qui s'était glissée dans la comatrice…).

III Conclusion

Voilà comment on peut inverser une matrice… Il vous reste à mener le même genre de démarche avec les matrices suivantes !

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 103 & 2022 & -1345 \\ 37 & 654 & 8763 \\ 75 & 3345 & 2345 \end{pmatrix}$$

Oui ? Une petite question avant de partir ?

« Monsieur, on doit vraiment le faire pour D ? »