L'intégrale de Lebesgue

I Analyse historique : « Pourquoi une autre intégrale ? »

Bernhard Riemann (1826-1866) a développé une théorie pour calculer ce qu'on appelle l'intégrale d'une fonction. Vous avez déjà travaillé sur cette notion que vous connaissez bien *a priori*. Il a proposé sa théorie dès 1853, elle concerne les fonctions continues mais aussi discontinues ; son approche repose sur des considérations géométriques.
Cette théorie ne convient que pour des fonctions ne variant pas trop sur de petits intervalles. Par la suite, les limites de sa théorie ont été étudiées par d'autres mathématiciens (Stieljes, Borel, Lebesgue, Riesz…). Leur but était de trouver comment définir l'intégrale d'une fonction présentant de fortes discontinuités.

C'est en 1902 que Henri Lebesgue (1875-1941) présente sa thèse concernant une nouvelle théorie de l'intégration sous le titre : « Intégrale, longueur, aire. ».
C'est sa théorie de l'intégration que nous allons étudier ici de manière très simplifiée. En effet, elle repose sur des concepts très abstraits qui sont hors de notre portée. En particulier, cette nouvelle théorie s'appuie sur des travaux de Jordan, Borel et Baire.
On retiendra ici que l'intégrale de Lebesgue permet le calcul de fonctions beaucoup plus générales. De plus, elle facilite le travail avec des fonctions qui sont définies par des séries de fonctions. Celles-ci se retrouvent dans le domaine des séries de Fourier que nous étudierons.

Un des intérêts de l'approche de Lebesgue réside dans la simplification apportée pour les calculs de limites, on peut mieux gérer des expressions du type : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$

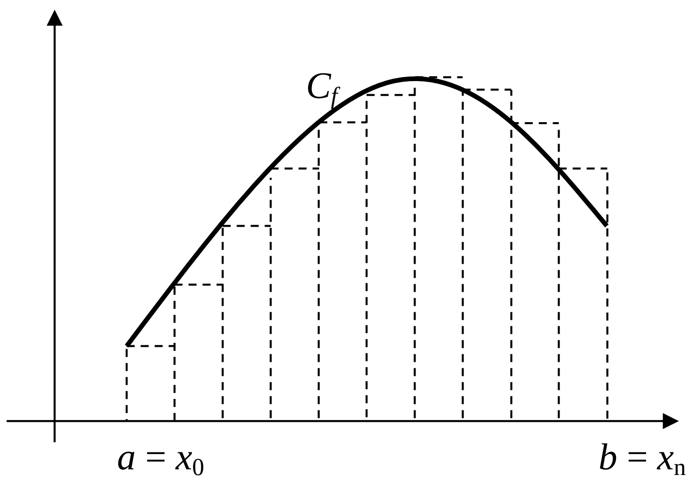
II L'intégrale de Riemann

La définition usuelle de l'intégrale entre a et b d'une fonction f positive et continue par morceaux est l'aire comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On note cette intégrale : $\quad I = \int_a^b f(x)\,dx$

On peut calculer cette intégrale de manière approchée en découpant l'intervalle $[a\,;\,b]$ en petits sous-intervalles pour appliquer la méthode des rectangles décrite ci-dessous.

I $\approx$ somme des rectangles



Le calcul est d'autant meilleur que le nombre n des sous-intervalles de taille $\alpha = \dfrac{b-a}{n}$ est grand…

En posant $x_k = a + k\,\alpha$, on a alors : $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha\, f(x_k)$

Lorsque cette limite est finie, on dit que f est intégrable au sens de Riemann.

Le problème vient du fait que certaines fonctions sont très discontinues et ne permettent pas ce type de calcul. On dit qu'elles ne sont pas intégrables au sens de Riemann.

Exemple : la fonction de Dirichlet définie par
$$f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(avec $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels)

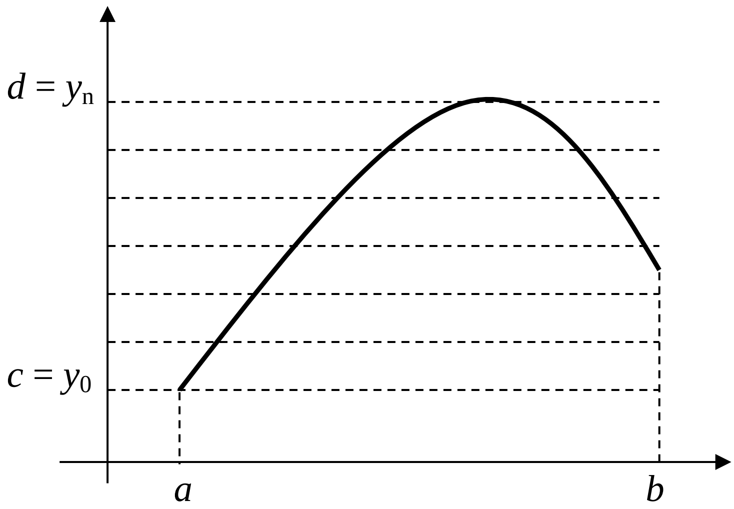
On appelle aussi cette fonction, la fonction indicatrice des rationnels sur $[0\,;\,1]$.

III L'intégrale de Lebesgue

Afin de présenter simplement l'intégrale de Lebesgue de manière générale, nous allons reprendre la fonction précédente et calculer son intégrale selon Lebesgue.

Pour cela, on change de point de vue : on s'intéresse à l'intervalle $[c\,;\,d]$ des valeurs prises par la fonction f et on découpe cet intervalle en n petits sous-intervalles de taille $\beta = \dfrac{d-c}{n}$ On pose alors : $y_k = c + k\,\beta$

On regarde ensuite sur quels intervalles f prend des valeurs comprises entre y_0 et y_1 de même entre y_1 et y_2
….



Alors, l'aire sous C_f est approchée par :

$$y_0\,m_0 + y_1\,m_1 + \ldots + y_{n-1}\,m_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k\,m_k$$

où m_0 = taille cumulée des intervalles où $f(x)$ vérifie $y_0 \leq f(x) \leq y_1$
m_1 = taille cumulée des intervalles où $f(x)$ vérifie $y_1 \leq f(x) \leq y_2$
....

Ensuite, on fait tendre n vers l'infini pour obtenir la valeur de l'intégrale.

Voici par quelle image Lebesgue lui-même expliquait la nature de son intégrale en la comparant à celle de Riemann :

« Je dois payer une certaine somme ; je fouille mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de Riemann. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale. »

Biographie de Lebesgue par Denjoy, Félix et Montel.

Il est important de noter la propriété suivante : lorsque la fonction f est intégrable au sens de Riemann, les deux intégrales ont la même valeur.

Cette nouvelle approche permet de traiter le cas de fonctions très discontinues qui sont utilisées pour la théorie du signal par exemple.

IV Pour approfondir : quelques notions théoriques.

La construction théorique de l'intégrale de Lebesgue utilise les concepts présentés dans cette partie.

1) Mesure de Lebesgue

Soit un sous-ensemble noté S de réels. On appelle mesure de S et on note $\mu(S)$ la « taille » de ce sous-ensemble.
La mesure de Lebesgue est l'unique mesure telle que l'intervalle $[a ; b]$ ait pour mesure $\mu([a ; b]) = b - a$

Un sous-ensemble formé d'un seul réel a une mesure nulle.

Un sous-ensemble dénombrable de réels a aussi une mesure nulle (les entiers et les rationnels sont dénombrables, les irrationnels ne le sont pas).

Enfin, la mesure de la réunion de deux intervalles disjoints est la somme de leur mesure.
si $[a ; b] \cap [c ; d] = \varnothing$ on a : $\mu([a ; b] \cup [c ; d]) = \mu([a ; b]) + \mu([c ; d])$

<u>Remarque :</u>

Une fonction f est égale à une fonction g « presque partout » si et seulement si les fonctions f et g ne sont différentes que pour certains points dont l'ensemble est de mesure nulle.

On peut écrire : $\mu(\{ x / f(x) \neq g(x) \}) = 0$

2) Fonction indicatrice - Fonction étagée

Soit S une partie de $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par : $f(x) = 1$ si $x \in S$ et $f(x) = 0$ si $x \notin S$. On dit que f est la fonction indicatrice (ou caractéristique) de S. Cette fonction est notée 1_S

On pose alors l'intégrale de Lebesgue de 1_S : $\int 1_S = \mu(S)$

Ensuite, on considère l'espace vectoriel engendré par les fonctions indicatrices dont les éléments sont de la forme : $\Sigma\, a_k\, 1_{Sk}$ avec a_k qui sont les coefficients réels correspondants aux fonctions indicatrices 1_{Sk}.

$\Sigma\, a_k\, 1_{Sk}$ est appelée une fonction étagée.

Alors, on pose par linéarité : $\int \Sigma\, a_k\, 1_{Sk} = \Sigma\, a_k\, \mu(S_k)$

On écrit aussi $e = \Sigma\, a_k\, 1_{Sk}$ et son intégrale par rapport à la mesure μ : $\int_X e\, d\mu$ avec X qui représente l'ensemble sur lequel on intègre la fonction étagée e.

3) Intégrale d'une fonction

Soit f une fonction positive définie sur E. L'intégrale de f est définie comme la borne supérieure de $\int_E s\, d\mu$ où s est une fonction qui varie dans l'ensemble de toutes les fonctions étagées inférieures à f.

On note : $\int_E f\, d\mu = \sup\limits_{s\ \text{étagée et}\ s \leq f} \int_E s\, d\mu$

Lorsque $\int_E f\, d\mu$ est finie, on dit que f est Lebesgue intégrable.

Deux fonctions égales presque partout ont la même intégrale. On peut alors intégrer la fonction de Dirichlet : le résultat vaut 0 (calcul détaillé délicat !).

Les propriétés usuelles des intégrales sont aussi vérifiées :

$$\int_E (af+g)\, d\mu = a\int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$$

$$\text{si } f \leq g \text{ alors } \int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$$

On définit aussi l'intégrale des fonctions dont le signe est quelconque en décomposant f selon : $f = f^+ - f^-$ où f^+ et f^- sont des fonctions positives.

Alors, on pose : $\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu$

De manière analogue, pour les fonctions complexes $f = g + \mathrm{i}\, h$

on pose : $\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu + \mathrm{i} \int_E h\, d\mu$

On retiendra à nouveau qu'une fonction intégrable au sens de Riemann est également intégrable au sens de Lebesgue et que les deux intégrales sont égales.

4) Théorèmes importants

Pour cette partie, on doit utiliser la notion de fonction mesurable. Sans développer ce point délicat, on retiendra que les fonctions avec lesquelles on travaillera ont toutes cette propriété.

Théorème de convergence monotone

Si (f_k) est une suite de fonctions mesurables positives telles que pour tout k :

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \quad \text{et si} \quad f = \lim f_k \quad \text{alors :} \quad \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

Théorème de convergence dominée

Si (f_k) est une suite de fonctions mesurables de limite f et s'il existe une fonction intégrable g telle que pour tout k : $|f_k| \leq g$ alors f est intégrable et on écrit :

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

V Conclusion

Pour conclure cette présentation de l'intégrale de Lebesgue, on peut dire que cette théorie étend la théorie habituelle de l'intégration à une classe de fonctions beaucoup plus large que la théorie de Riemann.

Les théorèmes habituels dans le cadre de l'intégrale de Riemann ont été étendus par Lebesgue ainsi que par d'autres mathématiciens. Ainsi, les physiciens qui rencontrent parfois des fonctions très particulières ont pu profiter du cadre élargi de la théorie de l'intégration.