L'Univers de Harry Tmétic

Entrons doucement dans l'univers étrange des entiers…

Le but de cette fiche très technique est de proposer les idées de base liées au maniement des entiers. Cet art très ancien, a été développé plus précisément par Euclide il y a près de 2 300 ans. Le document ci-contre est l'une des plus anciennes traces écrites de l'ouvrage d'Euclide « Les éléments ». D'après Wikipédia, il doit dater de près de deux millénaires. Vous trouverez ici certaines notions de cours d'arithmétique ainsi que quelques exercices corrigés pour vous aider au mieux… Bonne lecture !!

Point fondamental dans toute cette partie (de caractère assez technique…) : les héros sont des entiers ! Donc, ici, il n'y pas de nombres du genre 2,35 ou de fractions du type $\frac{7}{3}$.

L'ensemble des entiers naturels est $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;\dots\dots\dots\}$.

L'ensemble des entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \{\dots.;\ -2\,;\ -1\,;0\,;1\,;2\,;\dots\dots\}$.

Diviseur d'un entier

2 divise 8, car la division de 8 par 2 donne 4 qui est un autre entier. On note 2 | 8.

Certains nombres sont dits « parfaits » car la somme de leurs diviseurs (autres que lui-même) redonne le nombre de départ ! Exemple : 6 admet les diviseurs 1 ; 2 ; 3 ; 6. Et on vérifie : 1 + 2 + 3 = 6. Testez 28 !

On appelle *nombre premier* un entier naturel supérieur ou égal à 2 qui n'admet pour diviseurs que 1 et lui-même. La liste des nombres premiers est infinie : 2, 3, 5, 7, 11, 13…..

Tout entier naturel n au moins égal à 2 peut s'écrire comme le produit de nombres premiers notés p_i. On peut alors écrire formellement : $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$.

Exemples : $22 = 2 \times 11$; $75 = 3 \times 5^2$; $90 = 2 \times 3^2 \times 5$; $2022 = 2 \times 3 \times 337$

On appelle pgcd (*Plus Grand Commun Diviseur*) des entiers *a* et *b*, le plus grand diviseur qui divise à la fois *a* et *b*. On note pccd(*a*, *b*) = $a \wedge b$.

Exemples : $22 \wedge 75 = 1$; $75 \wedge 90 = 15$.

Lorsque $a \wedge b = 1$, on dit que *a* et *b* sont *premiers entre eux*.

Pour trouver le pgcd de deux entiers, on peut les décomposer en produits de nombres premiers, et on extrait les facteurs communs aux deux décompositions. On peut aussi l'algorithme d'Euclide que vous pouvez trouver un peu partout…

On peut aussi calculer le ppcm (*Plus Petit Commun Multiple*) de deux entiers. Parmi les multiples de *a* et ceux de *b*, on distingue le plus petit commun aux deux listes. On note : ppcm(*a*, *b*) = $a \vee b$.

Une petite formule : $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{a \wedge b}}$ (utile pour trouver le ppcm à partir du pgcd)

Exemple : $4 \vee 6 = \frac{4\times 6}{4 \wedge 6} = \frac{24}{2} = 12$. On vérifie que 12 est à la fois un multiple de 4 (car 12 vaut 3×4), un multiple de 6 (car 12 = 2×6) et c'est le plus petit entier ayant cette double caractéristique.

Exercices directs :

1) Déterminez si les nombres suivants sont premiers ou non : 7 759 ; 29 041 ; 1 234 567.

Méthode 1 : utilisez Excel pour diviser le nombre à tester par tous les entiers de 1 jusqu'à lui-même. Si les seules divisions tombant juste sont celles par 1 et lui-même, le nombre est bien premier.

Méthode 2 (un peu plus rapide) : il suffit de diviser le nombre *n* à tester par tous les entiers inférieurs à $\sqrt{n}$ (qui *a priori* n'est pas un entier, car sinon, on sait de suite que *n* n'est pas premier !).

Méthode 3 (nécessitant d'avoir sous la main la liste des premiers nombres premiers) : il suffit de diviser le nombre *n* à tester par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ (qui *a priori* n'est pas un entier…).

2) Déterminez la décomposition en facteurs premiers de : 5096 ; 15435. Donnez alors leur pgcd et leur ppcm.

Solutions :

1) On trouve 7 759 qui est premier ; 29 041 = 113 $\times$ 257 ; 1 234 567 = 127 $\times$ 9 721.
2) 5 096 = $2^3 \times 7^2 \times 13$; 15 435 = $3^2 \times 5 \times 7^3$

Théorème de Gauss

Soient trois entiers *a*, *b* et *c* tels que *a* divise le produit *bc* et avec $a \wedge b = 1$.
Alors, *a* divise *c*.

Exemple : On suppose avoir 5*n* = 12*m*. Cette relation montre que 12*m* est divisible par 5. Or, 5 est premier avec 12. Ainsi, on peut en déduire que *m* est divisible par 5.

Remarque : Si la condition $a \wedge b = 1$ n'est pas vérifiée, on ne peut rien dire. Un exemple très simple ? La relation 2*n* = 6*m* n'entraîne pas que *m* soit divisible par 2. C'est ce qui se passe dans la relation $2 \times 9 = 6 \times 3$ avec *n* = 9 et *m* = 3.

Théorème de Bezout

Les entiers naturels a et b (non nuls) sont premiers entre eux si et seulement si il existe des entiers relatifs *u* et *v* tels que : $u\,a + v\,b = 1$.

Petits exemples page suivante…

E1 : On sait que $3 \wedge 5 = 1$, donc on doit pouvoir trouver u et v tels que : $3u + 5v = 1$. Avec astuce, on trouve $u = -3$ et $v = 2$ qui convient.

E2 : On sait que $13 \wedge 17 = 1$. Mais là, c'est moins facile de « sentir » un couple tel que $13u + 17v = 1$. Comment trouver un couple (u, v) solution ? L'algorithme d'Euclide peut vous aider (voir un cours classique sur ce sujet si vous avez vraiment le temps…). On peut aussi utiliser le tableur Excel ou votre calculatrice en calculant $v = \frac{1-13u}{17}$ à partir de différents entiers consécutifs *u* de 0 jusqu'à … Dans cette série de calculs, on va trouver un résultat entier ! Pour ce cas, je l'ai fait pour vous :

2	-1,471
3	-2,235
4	-3
5	-3,765
6	-4,529

Ainsi, on voit que le couple $(u = 4\,; v = -3)$ est solution !

On a bien trouvé une relation qui convient : $13 \times 4 + 17 \times (-3) = 1$

Application de Bezout aux équations dites diophantiennes

Exo1 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $2x + 4y = 1$.

Si cette équation admettait des solutions, on pourrait dire, avec le théorème de Bezout, que 2 et 4 sont premiers entre eux ! On peut donc conclure à l'absence de solution.

Exo2 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $13\,x + 17\,y = 1$ (*)

On va utiliser une relation particulière déjà vue : $13 \times 4 + 17 \times (-3) = 1$ (**)
La soustraction entre (*) et (**) donne : $13(x-4) + 17(y+3) = 0$ ou aussi : $17(y+3) = 13(4-x)$
Cette relation montre que 17 divise le produit $13(4-x)$. Or, 17 est premier avec 13. On conclut alors (avec le théorème de Gauss !) que 17 divise $(4-x)$.
Ainsi, il existe k tel que : $4 - x = 17k$.
Voici donc des solutions possibles pour x : $x = 4 - 17k$ avec k entier relatif.
On en déduit avec (*) : $13\,(4 - 17k) + 17\,y = 1$ et ainsi : $17y = 1 - 52 + 13 \times 17k$.
Au final : $y = 13\,k - 3$.
Les couples solutions possibles sont donc : $(4 - 17k\,; 13k - 3)$ $k \in \mathbb{Z}$.
Ensuite, il est facile, en calculant $13\,x + 17\,y$ ce qui permet de retrouver 1 pour toute valeur de k.

Exercice d'application directe : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5\,x + 11\,y = 1$

Solution : On trouve une solution particulière avec : $5 \times (-2) + 11 \times 1 = 1$

On obtient par soustraction : $5(x+2) + 11(y-1) = 0$. Puis, $5(x+2) = 11(1-y)$. On en déduit que 11 divise $(x+2)$. D'où : $x = 11k - 2$. Ensuite on obtient : $y = 1 - 5k$.

Les couples solutions sont finalement $(x, y) = (11k - 2\,, 1 - 5k)$ avec k entier relatif.

L'univers des congruences

Effectuons la *division euclidienne* de 123 par 5. Si ! Vous savez le faire, on l'apprend quand on est petit !! Mais, je veux bien vous rappeler la technique :

Il faut chercher une relation du genre : $123 = k \times 5 + r$ où r est le reste de la division (avec $0 \leq r < 5$)

Avec une petite calculatrice, on a : $\frac{123}{5} = 24{,}6$ Ainsi, on obtient $k = 24$.

Il suffit enfin de calculer : $r = 123 - 24 \times 5 = 3$.

Au final : $123 = 24 \times 5 + 3$. On écrit : « 123 est congru à 3 modulo 5 » ou bien : $123 \equiv 3\ [5]$.

Pour finir : $123 \equiv 3\ [5]$ peut aussi se traduire par : « 3 est le reste de la division euclidienne de 123 par 5 ».

Remarques : * le nombre 24 est absent de la relation, seul le reste nous importe ici.

* on peut écrire $5 \equiv -1\ [6]$ avec un nombre négatif à droite (car : $5 = -1 + 6$)

Point important : lorsque a est divisible par b, on obtient un reste nul, ainsi : $a \equiv 0\ [b]$.

Règles de calculs avec les congruences : Compatibilité avec l'addition, la multiplication, les puissances et la multiplication par un entier.

$\begin{cases} \boldsymbol{x \equiv a\ [u]} \\ \boldsymbol{y \equiv b\ [u]} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x + y \equiv a + b\ [u]}$ $\quad\quad$ $\begin{cases} \boldsymbol{x \equiv a\ [u]} \\ \boldsymbol{y \equiv b\ [u]} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x\, y \equiv a\, b\ [u]}$

$\boldsymbol{x \equiv a\ [u] \Rightarrow x^n \equiv a^n\ [u]}$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{x \equiv a\ [u] \Rightarrow m\, x \equiv m\, a\ [u]}$

Petite démo de la première implication :
$x \equiv a\ [u]$ donne : $x = k\, u + a$ de même $y \equiv b\ [u]$ donne : $y = k'\, u + b$
Par somme : $x + y = (k + k')u + a + b$ que l'on peut écrire selon : $x + y \equiv a + b\ [u]$.

Des exemples d'application des congruences ?

Exemple 1 :
Dans la division par 2, il n'y a que deux restes possibles : 0 ou 1.
Ainsi, pour tout entier *n*, on aura soit $n \equiv 0\ [2]$ soit $n \equiv 1\ [2]$.
Il n'y a donc que deux possibilités. On dit que *n* est un nombre pair ou impair.

Exemple 2 :
Montrons que tout nombre de la forme $n(n + 1)(n + 2)$ est toujours divisible par 3.
L'entier n vérifie nécessairement l'une des relations de congruence modulo 3 suivantes : $n \equiv 0\ [3]$; $n \equiv 1\ [3]$; $n \equiv 2\ [3]$.
Alors, $n + 1$ vérifie respectivement l'une des congruences suivantes :
$n + 1 \equiv 1\ [3]$; $n + 1 \equiv 2\ [3]$; $n + 1 \equiv 0\ [3]$.
Et de même, l'entier $n + 2$ vérifie respectivement l'une des congruences :
$n + 2 \equiv 2\ [3]$; $n + 2 \equiv 0\ [3]$; $n + 2 \equiv 1\ [3]$.
Ainsi, l'un des trois termes *n*, *n* + 1 ou *n* + 2 est congru à 0 modulo 3.
Au final, le produit $n(n + 1)(n + 2)$ est toujours divisible par 3 d'après la compatibilité avec la multiplication.

Exemple 3 :
L'entier 43^{12} est-il divisible par 7 ?
On peut traduire par : « Quel est le reste de la division euclidienne de 43^{12} par 7 ? ». Remarquons d'abord que l'entier testé est vraiment trop grand pour effectuer le calcul ! Même une bonne calculatrice ne peut donner de résultat utile (faites le test !).
Passons par les congruences : 43 = 42 + 1 ou encore 43 = $6 \times 7 + 1$. Donc : $43 \equiv 1\ [7]$.
On élève à la puissance 12 pour obtenir : $43^{12} \equiv 1^{12}\ [7]$. Ainsi : $43^{12} \equiv 1\ [7]$.
Conclusion : le reste est non nul, le nombre testé n'est pas divisible par 7.

Exemple 4 :
Variante de l'exercice ci-dessus : « L'entier 44^{124} est-il divisible par 7 ? ».
La relation $44 \equiv 2\ [7]$ donne : $44^{124} \equiv 2^{124}\ [7]$. Et là, on est bloqué car l'entier 2^{124} est trop grand pour savoir s'il est oui ou non divisible par 7. Comment faire alors ?
On cherche une puissance de 2 qui donne un reste égal à 1 dans la congruence par 7.
Facile : $2^3 = 8 \equiv 1\ [7]$. Et là, on peut travailler : on utilise 124 = 41 × 3 + 1.
On pose : $2^{124} = 2^{123+1} = 2^{123} \times 2$. Or : $2^{123} = 2^{3\times 41}$. Avec $2^3 \equiv 1\ [7]$, on a alors : $2^{3\times 41} \equiv 1^{41} \equiv 1\ [7]$.
Il reste à dire : $2^{124} = 2 \times 2^{123} \equiv 2\ [7]$.
Résumons : $44^{124} \equiv 2^{124}\ [7] \equiv 2\ [7]$. Cet entier n'est pas divisible par 7.

Exercices d'application immédiate :

1) Déterminez le reste de la division euclidienne de 29^{241} par 5.

2) Déterminez le reste de la division euclidienne de 29^{241} par 8.

Solutions : page suivante…

1) On peut partir de $29 = -1 + 6 \times 5$ soit : $29 \equiv -1$ [5].
On a alors : $29^{241} \equiv (-1)^{241}$ [5].
Ainsi : $29^{241} \equiv -1$ [5], et on peut écrire : $29^{241} = 5k - 1 = 5k' + 5 - 1 = 5k' + 4$
On peut ainsi conclure : $29^{241} \equiv 4$ [5]. Le reste cherché est donc égal à 4.

2) On peut partir de $29 = -3 + 4 \times 8$ soit : $29 \equiv -3$ [8]. Ainsi : $29^2 \equiv 9$ [8] $\equiv 1$ [8].

Ensuite, avec 241 = $2 \times 120 + 1$: $29^{241} = 29^{240+1}$ or $(29^2)^{120} \equiv 1^{120} = 1$ [8]

Ainsi : $29^{241} \equiv 29$ [8] et finalement : $29^{241} \equiv 5$ [8]. Le reste cherché est égal à 5.

Exercices classiques, voire très classiques…

I Les très grands classiques

A Montrez que le carré d'un entier pair reste pair. De même, démontrez que le carré d'un entier impair est encore impair.

B Démontrez en procédant par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Vous pouvez procéder selon les étapes suivantes :

a) Supposons l'existence d'entiers p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux (la fraction est sous forme irréductible). Montrez alors que ceci implique « p est pair ».
b) Montrez alors, en utilisant a), que cela entraîne également « q est pair ».
c) Conclure.

C J'ai profité de la promotion « Tous les DVD à 15 € et tous les CD à 11 € » pour un total de 152 €. Est-il possible de deviner le nombre respectif de DVD et de CD que j'ai ramené chez moi ?

D Déterminez le chiffre des unités des entiers 11^{243} et 13^{243}.

II Problèmes d'Achille et Hector

Achille et Hector sont deux marchands qui parcourent les villes italiennes pour gagner leur vie. Ils se croisent un beau jour à Rome et discutent chiffres (les marchands de cette époque étaient très forts en arithmétique…).

1) Cher Achille, pourrais-tu démontrer que le nombre N calculé selon $N = n^3 - n$ (avec n entier naturel) est toujours divisible par 6 ? Petit indice de départ : Tu peux écrire N sous une autre forme !

2) Bien, à ton tour Hector… Pourrais-tu me donner toutes les solutions formées d'entiers naturels de l'équation (E) $7\,x + 5\,y = 105$? Pour cette question, on n'utilisera ni Excel, ni calculette (qui n'existaient d'ailleurs pas à cette époque…). L'utilisation du théorème de Bezout n'est pas autorisée non plus (car

Etienne Bezout est né en 1730, plus de mille ans après notre histoire). Allez, vous aurez quand même le droit d'utiliser le théorème de Gauss. Petit indice de départ dans ce cas : remarquez que *x* doit être multiple de 5, puis que *y* doit lui être multiple de 7.

3) Dans combien de temps Achille et Hector vont-ils se revoir à Rome ? Achille s'y rend toutes les quinze semaines alors qu'Hector y retourne toutes les 21 semaines.

Solutions

I Les solutions de A et B sont consultables très aisément sur le net, car ces questions sont traitées partout !

C En posant *x* le nombre de DVD et *y* celui des CD, le problème revient à chercher les solutions de 15 *x* + 11 *y* = 152.

Il est clair qu'il faut à la fois *x* et *y* positifs. Il suffit alors de chercher avec Excel les valeurs de *x* pour lesquelles la division $\frac{152-11y}{15}$ donne un résultat entier. On trouve ainsi une solution unique $(x = 5\,;y = 7)$.

Mais, cette solution est pour les fainéants ! Voici une autre version plus « sérieuse »…

a) Posons 15 *x* + 11 *y* = 1 d'abord. Avec quelques essais, on voit que $(x = 3\,;y = -4)$ est une solution.

b) On pose alors : $15 \times 3 + 11 \times (-4) = 1$ que l'on multiplie par 152 pour obtenir une nouvelle relation : $15 \times (456) + 11 \times (-608) = 152$

c) On fait la soustraction habituelle pour trouver : $15(x - 456) + 11(y + 608) = 0$

Ainsi, on obtient : $456 - x = 11k$ puis $y + 608 = 15k$

Les solutions à notre problème sont à chercher parmi : $(x = 456 - 11k\,;y = 15k - 608)$

Comme on cherche des valeurs positives, cela impose : $\begin{cases}456 - 11k \geq 0\\15k - 608 \geq 0\end{cases}$ d'où : $\begin{cases}k \leq 41\\k \geq 41\end{cases}$

On tente donc *k* = 41 seule solution possible pour notre situation.

On obtient au final $x = 5$ et $y = 7$ solution qui convient bien.

D Le problème posé revient à déterminer le reste des divisions euclidiennes des nombres proposés par 10.

a) On peut dire : $11 \equiv 1\ [10]$. Ainsi, en passant à la puissance 243 : $11^{243} \equiv 1\ [10]$.

Pour le premier, le reste vaut 1. Il aura donc 1 comme chiffre des unités.

b) On peut dire : $13 \equiv 3\ [10]$. Mais on ne pourra pas déterminer 3^{243}. Donc, il faut chercher un intermédiaire.

On a : $13^2 \equiv 3^2\ [10]$. D'où, $13^2 \equiv 9\ [10]$ ou encore : $13^2 \equiv -1\ [10]$

Ainsi, en passant à la puissance 121, on obtient : $(13^2)^{121} \equiv (-1)^{121}\ [10]$.

Ainsi : $13^{242} \equiv -1\ [10]$. Il reste à multiplier par 13 : $13^{243} \equiv -13\ [10]$.

Ce qui donne en ajoutant 2×10 à droite (ce qui est autorisé par la congruence) :

$13^{243} \equiv -13 + 20\ [10]$. Et ainsi : $13^{243} \equiv 7\ [10]$.

Le chiffre des unités est égal à 7.

II 1) On remarque d'abord que pour $n = 0$ et $n = 1$, N vaut 0 qui est bien divisible par 6 (la division donne 0).

Pour les autres cas, on peut écrire : $N = n(n^2 - n) = n(n+1)(n-1)$

Le nombre N est donc le produit de trois entiers consécutifs. L'un des trois est nécessairement un nombre pair ! Donc N est déjà divisible par 2.

De plus, l'un des trois est congru à 0 modulo 3. En effet, pour des entiers consécutifs distincts, les restes possibles étant 0, 1 ou 2, dans la division par 3, l'un des restes vaut 0. Ainsi, le nombre N est aussi multiple de 3.

Au final, N est de la forme $2 \times 3 \times N'$. Il est bien divisible par 6.

2) On voit immédiatement que 105 est multiple de 5. Ainsi (E) $\Leftrightarrow 7x = 5(21 - y)$ ce qui montre que x est divisible par 5 (théorème de Gauss). On posera donc $x = 5x'$.

De même, puisque $105 = 5 \times 3 \times 7$, on peut dire : (E) $\Leftrightarrow 5y = 7(15 - x)$ ce qui montre que y est divisible par 7. On posera donc $y = 7y'$.

On utilise ces informations dans (E) pour obtenir : $35\,x' + 35\,y' = 105$

Et ainsi : $x' + y' = 3$.

Cette équation réduit les solutions possibles à $(0\,;3)\,;(1\,;2)\,;(2\,;1);(3\,;0)$.

Il est ensuite facile de montrer que les couples $(x\,;y)$ suivants sont bien solutions du problème. $(0\,;21), (5\,;14), (10\,;\ 7), (15\,;0)$.

3) Il faut chercher le ppcm de ces deux nombres. En effet, il faut à la fois attendre un multiple de 15 et un multiple de 21. Ceci est bien lié au ppcm des deux nombres.

Comme leur pgcd est facilement 3, on en déduit : ppcm(15,21) = $\frac{15\times 21}{3} = 105$ (encore lui !!). Ainsi, il faudra attendre 105 semaines pour une nouvelle rencontre. Soit, deux années et une semaine…

Petite récréation : Les nombres amicaux…

I Les diviseurs d'un nombre…

Prenons un exemple : N = 12

On peut le diviser en obtenant un résultat entier par les nombres :

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12. On a par exemple : 12 / 4 = 3

* A vous de trouver *tous* (pas si facile…) les diviseurs de : A = 48 puis de B = 76.

II Somme des diviseurs d'un nombre entier

Considérons le nombre N = 8. Ses diviseurs sont : 1 ; 2 ; 4 ; 8.

Pour la suite de cette récréation, on ne considère que les diviseurs de N différents de N lui-même. Pour notre N = 8, on garde donc seulement les diviseurs : 1 ; 2 ; 4.

On peut alors calculer la somme S_N de ces diviseurs : $S_8 = 1 + 2 + 4 = 7$.

Remarque : certains nombres sont dits « parfaits » lorsque cette somme est égale au nombre N de départ.

* A vous de trouver les nombres parfaits parmi : C = 6 ; D = 22 ; F = 28 ; F = 48

III Nombres amicaux

On dit que deux nombres entiers N et M sont « amicaux » lorsque la somme des diviseurs de N est égale à M et que l'on a également la somme des diviseurs de M qui donne N !

* Etudiez la question : On considère $N = 48$ et $M = 76$. Sont-ils amicaux ?

* Montrez en détaillant votre travail que $N = 220$ et $M = 284$ sont amicaux.

* Vérifiez que $N = 1\,184$ et $M = 1\,210$ sont amicaux.

* Déterminez M pour que $N = 2620$ et M puissent être amicaux. Sont-ils amicaux ??

Histoire : le couple (220 ; 284) est connu depuis fort longtemps puisque l'on en trouve la trace dans la Bible ! Au quatorzième siècle, on trouve le couple qui semble très difficile : (17 296 ; 18 416). Un couple (pourtant pas très compliqué en apparence) est resté inconnu jusqu'en 1866 (1 184 ; 1 210). Il est découvert par un jeune de seize ans ! (B. Nicolo Paganini).