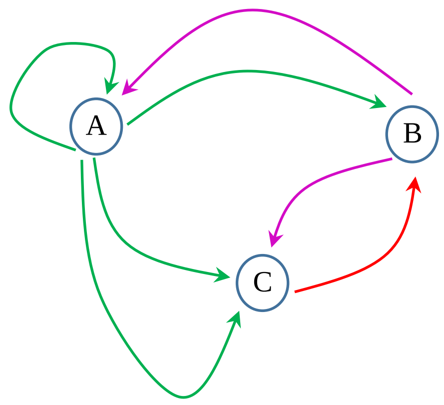
Graphes et Matrices : une introduction…

Dans certains secteurs d'activités comme le transport, il peut être important de prévoir avec soin l'ordre dans lequel différents lieux vont être visités par un même camion par exemple. Ceci, pour minimiser les coûts ainsi que la fameuse empreinte carbone…

On rencontre ainsi des schémas du genre suivant :

(Remarque : la couleur est juste là pour nous aider à mieux comprendre au sein de ce cours…)



On peut imaginer que A, B et C représentent des villes reliées par des routes indiquées par les flèches. Parfois, il est indiqué un sens de parcours (lié à des sens interdits !).

On utilise les mots de vocabulaire suivants :

Graphe : schéma global.
Sommet : point de départ ou d'arrivée d'une ligne.
Arête : ligne reliant deux sommets
Le graphe est dit orienté lorsque des flèches indiquent les sens de parcours autorisés.
On dit que deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par une arête ou un arc (arête orientée par une flèche).

On peut synthétiser toutes les informations utiles pour comprendre un graphe à l'aide d'une matrice appelée *matrice d'adjacence*. Ici, on notera M une telle matrice. Ses coefficients seront alors notés $m_{i\,j}$ avec i le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne où le coefficient se trouve. Attention : toujours penser dans cet ordre : Ligne puis Colonne.

Comment remplir une matrice d'adjacence ?

Pour écrire la matrice d'adjacence d'un graphe, il faut numéroter les sommets pour éviter toute ambiguïté. Souvent, le choix est déjà imposé par des lettres (A, B, …) ou des numéros (1, 2, …) présents sur le graphe. Mais, il se peut que vous deviez faire ce travail vous-même.

Ensuite, on définit la taille de la matrice : c'est une matrice carrée dont le nombre de lignes est égal à celui des sommets du graphe. Pour l'exemple ci-dessus, la matrice sera une 3×3.

Chaque ligne est liée à un sommet et chaque colonne de même. Par exemple, le coefficient en ligne 2 et en colonne 3 donne des informations sur les liens entre le somment B (car ligne 2) et le sommet C (car colonne 3).

Si vous tournez la page, on attaque le problème !

Remplissons ensemble la première ligne (liée au premier sommet, donc on ne regarde que les flèches vertes). Il faut raisonner comme ceci :

- Combien a-t-on de flèches pour aller de A à A ? On a une boucle, donc $m_{1\,1} = 1$
- Pour aller de A vers B, on voit une seule flèche. Donc : $m_{1\,2} = 1$
- Pour aller de A vers C, on voit cette fois deux flèches. Donc : $m_{1\,3} = 2$

Pour le moment, notre matrice est : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & & \end{pmatrix}$

Ensuite, on regarde le sommet B, ce qui nous donnera la deuxième ligne de la matrice.

Avec les flèches violettes, on obtient :

- Une flèche va de B vers A donc : $m_{2\,1} = 1$
- Aucune flèche ne va de B vers lui-même donc : $m_{2\,2} = 0$
- Une flèche va de B vers C donc : $m_{2\,3} = 1$

Donc, pour le moment on a : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

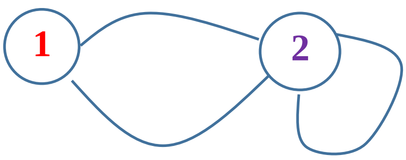
Ensuite, on regarde le sommet C, ce qui nous donnera la troisième ligne de la matrice.

Avec les flèches rouges, on obtient :

- 0 flèche va de C vers A donc : $m_{3\,1} = 0$
- 1 flèche va de C vers B donc : $m_{3\,2} = 1$
- aucune flèche ne va de C vers lui-même donc : $m_{3\,3} = 0$

Donc, au final la matrice de notre graphe est : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Autre exemple pour voir le cas où les arêtes n'indiquent pas le sens de parcours.</u>



Dans ce cas, on obtient : $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(vérifiez bien ce résultat…)

Ce graphe n'étant pas orienté, la matrice est logiquement symétrique !

Encore un peu de vocabulaire…

Un graphe est simple s'il ne présente aucune boucle et si les sommets sont reliés avec au plus une arête. L'exemple précédent est tout le contraire d'un graphe simple puisque l'on voit une boucle (du **2** vers le **2**) et on voit aussi deux arêtes reliant le **1** au **2**.

Une boucle est, comme vous l'avez déjà noté, une arête d'un sommet vers lui-même.

L'ordre d'un graphe est égal au nombre de ses sommets.

Une chaîne est une liste de sommets consécutifs adjacents. Pour nous, on peut dire que c'est un chemin allant d'une ville à une autre en notant le parcours choisi. Pour l'exemple de départ, si je veux aller de A vers C, je peux utiliser des chemins différents : ABC ou AAC ou encore ABAC.

La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui sont utilisées. Par exemple, la chaîne AAC est de longueur 2, la chaîne ABAC est de longueur 3.

Question affreuse : peut-on dénombrer le nombre de chaînes de longueur n allant d'un sommet à un autre ?

Pourquoi affreuse ? Car il faudrait faire plein de petits dessins et n'oublier aucun chemin !

Ouf : on peut ruser autrement grâce au calcul de la matrice M à la puissance n (pour les chaînes de longueur n bien sûr…).

Exemple détaillé avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ pour le petit graphe précédent avec ses deux sommets.

Cherchons le nombre de chaînes de longueur 2. On obtient facilement : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Il existe donc quatre chaînes de longueur 2 allant du **1** vers le **1** par exemple. Vous pouvez faire le travail par vous-même ! Mais je vous aide pour le premier essai. On peut faire les trajets suivants : **121** en faisant à la suite les deux arêtes (celle du haut et celle du bas), ceci en tournant dans le sens trigo ou dans le sens inverse. On peut aussi faire un aller-retour sur l'arête du haut ! De même avec l'arête du bas. Au total, cela fait bien quatre « chemins » différents qui vont du **1** vers le **1** en utilisant deux arêtes (éventuellement identiques).
Remarque : on voit aussi qu'il existe 2 chaînes de longueur 2 entre le **1** et le **2**.

Poursuivez cette étude avec le graphe de départ et sa matrice 3×3 pour travailler le côté matriciel !
Autre conseil : fabriquez vos propres graphes (orientés ou non) et matrices !! Puis explorer le nombre des chaînes de telle ou telle longueur… c'est assez ludique au final !!

Conclusion : lorsque votre chemin vous conduira devant un graphe à analyser, vous voilà j'espère plus en confiance !! Sinon, il vous suffit de consulter d'autres articles sur le même sujet qui est fort bien documenté sur le net (même si seule l'analyse des graphes simples est trop souvent proposée…).