Fonctions rationnelles

Toute fonction du type $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ avec p et q des polynômes est appelée fonction rationnelle. Notre but est de savoir mener à bien leur étude.

I Domaine de définition

f sera définie à la condition : $q(x) \neq 0$. En effet, il est impossible de calculer $\dfrac{p}{0}$.

Exemples :

* $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$. Il faut étudier la possibilité d'avoir $x^2+x+1=0$.
Si oui, il faudra éviter les valeurs de x correspondantes.
Donc, on pose : $x^2+x+1=0$ On obtient : $\Delta = 1 - 4 = -3$ Donc aucune solution.

On pourra toujours calculer $f(x)$, pas de problème de division par zéro.
On dit alors que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ (l'ensemble de tous les réels). Il n'y a pas de valeur interdite.
On note : $D_f = \mathbb{R}$.

Remarque : Si l'on prend $x = -1$, le numérateur (en haut de la fraction !) s'annule. Ainsi, on trouve $f(-1)=\dfrac{0}{1}=0$. Cette valeur ne pose pas de soucis…

* $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-2}$. Peut-on avoir 0 pour résultat au dénominateur ?

Posons : $x^2-x-2=0$. On obtient : $\Delta = 1 + 8 = 9$. On a donc deux solutions possibles.
$x_1=\dfrac{1-3}{2}=-1$ et $x_2=\dfrac{1+3}{2}=2$
Donc, il faudra éviter de prendre $x = -1$ et $x = 2$ (sinon, division par 0).
Finalement :

$$D_g = \mathbb{R} \text{ privé de } -1 \text{ et } 2 = \mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,2\} =]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$$

II Etude des variations

Comme toute fonction, il faut calculer la dérivée puis analyser son signe. Lorsque l'on aura $f'(x)$ positive, f sera croissante et inversement dans le cas où $f'(x)$ sera négative.

Formule adaptée : $f=\dfrac{u}{v}$ a pour dérivée : $f' = \dfrac{u'\,v-u\,v'}{v^2}$

Remarque importante :

On cherche le signe de la dérivée or, le terme v^2 est toujours positif. Donc, il ne joue aucun rôle. Il suffit de chercher le signe du terme N = $u'\,v - u\,v'$ (le Numérateur de $f\,'$).

Exemples :

* $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ sur [–5 ; 5].

On a ici : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\, 2 \,\}$ (il faut $x - 2 \neq 0$ donc $x = 2$ est à interdire)

Pour calculer la dérivée, on pose : $u = x + 1$ et $v = x - 2$ avec : $u' = v' = 1$

Ensuite : $f\,'(x) = \dfrac{\text{N}}{(x-2)^2}$ avec : $\text{N} = 1 \times (x-2) - (x+1) \times 1 = -3$

Dans ce cas : $\text{N} < 0$ ce qui donne : $f\,'$ toujours négatif donc f est décroissante.

Son tableau de variations est donc :

x	-5	2	5
$f\,'(x)$			
f	↘		↘

$f(-5) = \dfrac{4}{7}$ $f(5) = 2$

* $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ sur [–10 ; 10].

Ici : $D_g = \mathbb{R}$ puisque $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet aucune solution ($\Delta = -3 < 0$)

Pour calculer la dérivée, on pose : $u = x + 1$ $v = x^2 + x + 1$
D'où : $u' = 1$ et $v' = 2\,x + 1$

D'où : $g\,'(x) = \dfrac{\text{N}}{v^2}$ où : $\text{N} = 1 \times (x^2 + x + 1) - (x + 1) \times (2\,x + 1) = \ldots = -\,x^2 - 2\,x$

Remarque : ne pas se fier aux signes « – » pour annoncer que N est négatif !
exemple de calcul pour $x = -1$, on trouve $\text{N} = -1 + 2 = 1$ (positif). Vu ?

Méthode : Résoudre N = 0 $-\,x^2 - 2\,x = 0$ $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 0 = 4$

Deux solutions : $x_1 = \dfrac{2-2}{-2} = 0$ et $x_2 = \dfrac{2+2}{-2} = -2$

Le signe de N est alors :

–10		–2		0		10
	N < 0		N > 0		N < 0	

en effet : si $x = -5$ N = …… < 0
si $x = -1$ N = …… > 0 et enfin, si $x = 5$ N = ……. < 0

Remarque : le signe de N est celui de la fonction parabole associée

Ainsi, avec le signe de N, on obtient celui de g' et son tableau de variations :

x	-10		-2		0		10
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

et avec : $g\,(-10) =$ ……. $g(-2) =$ ……… $g(0) =$ ……… $g(10) =$ ……..

Rappel : on avait $D_g = \mathbb{R}$ donc pas de problème de valeur interdite…

Vérifiez avec votre calculatrice l'allure de C_g.

* $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - x - 2}$ sur $[-4\,;\,4]$

Si on résout : $x^2 - x - 2 = 0$, on trouve : $\Delta = 1 + 8 = 9$ puis : $x_1 = -1$ $x_2 = 2$
Donc, le domaine de définition de h est : $D_h = \mathbb{R}$ privé de -1 et de 2.

Dérivée de h : posons $u = x - 1$ $v = x^2 - x - 2$ puis : $u' = 1$ $v' = 2\,x - 1$
Donc : $N = 1 \times (x^2 - x - 2) - (x - 1) \times (2\,x - 1) = \ldots = -\,x^2 + 2\,x - 3$

Résoudre : $N = 0$ On a : $\Delta = 4 - 12 = -\,8 < 0$

N ne s'annule pas et garde donc un signe identique. Pour $x = 0$, $N = -3$. Donc : $N < 0$

La dérivée h' est négative. Donc :

x	-4		-1		2		4
$h'(x)$		$-$		$-$		$-$	
h		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	

Remarque : il ne faut pas oublier les valeurs interdites de D_h.

Visualiser cette fonction avec votre calculatrice pour analyser le graphe…

III Exercices

1) Etudiez le signe des expressions avec un tableau de signes :

$A = x^2 + x - 3$ $B = -2\,x^2 - 4\,x + 1$ $C = -4\,x^2 + x - 1$

2) Déterminez le domaine de définition des fonctions :

$f_1(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ $f_2(x) = \dfrac{3x+2}{x^2 - x + 4}$ $f_3(x) = \dfrac{2x-3}{x^2 + x - 12}$

3) Calculez les dérivées de ces fonctions puis étudiez ces fonctions jusqu'au tableau des variations sur $[-10\,;\,10]$.