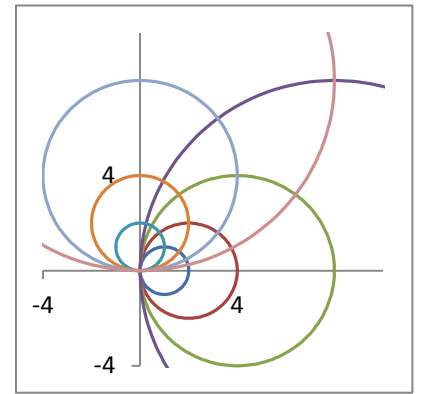


Réseaux de courbes et fonctions holomorphes



I Un exemple

On considère les fonctions :
$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{cases}$$

1) Calculez Δu puis Δv .

2) On considère les lignes de niveau L_k et C_K définies par : $u(x, y) = k$ et $v(x, y) = K$.

Tracez (sur votre ordi, votre calculatrice ou bien à la main...) les courbes L_1 et L_4 puis C_2 et C_8 en considérant x et y positifs. Attention : le repère devra être orthonormé.

Conseil : sur une calculatrice graphique, vous pouvez afficher une fenêtre du genre $x \in [0 ; 4,5]$ et $y \in [0 ; 3]$ pour obtenir un repère à peu près orthonormé étant donné le format de l'écran...).

3) Quelle remarque pouvez-vous faire en observant bien la figure obtenue ?

Conseil : regardez bien les points d'intersection...

4) Regardons de plus près... Déterminez les coordonnées de $M = L_1 \cap C_2$.

Rappel : on peut noter le nombre d'or φ avec : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

5) En M , déterminez un vecteur $\vec{U}$ orthogonal à L_1 et un vecteur $\vec{V}$ orthogonal à C_2 .

Conseil : utilisez $\vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}} u(x, y) \dots$ Calculez alors $\vec{U} \cdot \vec{V}$ puis conclure.

II Fonction holomorphe

Une fonction holomorphe sur un ouvert U est une fonction $\mathbb{C}$ -différentiable.

Ce concept étant délicat, on admet que $f(z) = z^2$ (sur $\mathbb{C}$) et $g(z) = \frac{1}{z}$ (sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) sont de bons exemples de telles fonctions..

1) Sachant que $z = x + iy$, donnez f sous la forme $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$.

2) Faites la même chose pour g et déterminez Δu et Δv pour la fonction g .

3) Déterminez les équations des lignes de niveau L_k et C_K associées à $g(z)$.

Comment ces lignes s'appellent-elles ? Pouvez-vous en donner les caractéristiques ?

4) Soit $M = L_k \cap C_K$. Démontrez que L_k et C_K se croisent orthogonalement en M en utilisant les équations de L_k et C_K et les gradients.

III Equations de Cauchy-Riemann et un théorème de Riemann (1851).

Soit $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. Si f est holomorphe, alors on a nécessairement les relations suivantes : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Montrez alors que f est harmonique ($\Delta f = \Delta u + i \Delta v$) si u et v sont C^2 .

IV Une curiosité

Ci-contre le graphique d'une fonction *méromorphe* (qui est holomorphe sauf en certains points appelés pôles de la fonction).

