Signal $s(t)$ ⇒ Fonction de transfert $H(p)$ ⇒ Equation

Introduction

Lorsque l'on soumet un **système** à une **entrée** (par exemple une tension imposée), il réagit d'une certaine manière en donnant un signal de **sortie** (une autre tension par exemple). Il est théoriquement possible de relier l'entrée à la sortie par la « fonction de transfert » du système, souvent notée $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ lorsque l'on travaille avec la transformée de Laplace.

L'un des objectifs de cette fiche consiste à retrouver la fonction de transfert d'un système à partir du signal temporel enregistré à sa sortie lorsque l'entrée est un échelon.

Traduction : vous achetez une mystérieuse boîte noire ; vous l'alimentez en entrée avec une fonction constante ; vous mesurez la sortie donnée par la boîte… et PAF ! Vous pouvez donner le principe de fonctionnement de cette boîte noire !! Génial non ? Même pas besoin de récupérer les plans secrets de cette boîte en risquant la vie d'une douzaine d'agents secrets, pas besoin non plus de risquer un accident en essayant de l'ouvrir avec un tournevis qui va forcément déraper sur l'un de vos doigts….

Conclusion : cette fiche est très précieuse…

Théorie

On alimente le système avec une fonction de Heaviside : $u(t) = \begin{cases} 0 & pour\ t < 0 \\ 1 & pour\ t \geq 0 \end{cases}$. On mesure alors le signal temporel de sortie et on suppose qu'il est possible de le modéliser avec des fonctions mathématiques pas trop compliquées… On note ce signal $s(t)$.

On peut alors obtenir la fonction de transfert présentée ci-dessus en calculant les transformées de Laplace des signaux d'entrée et de sortie. La fonction $H(p)$ étant retrouvée, on pourra même retrouver un modèle de notre système sous la forme d'une équation différentielle. Le bonheur absolu !!

L'exemple suivant vous permettra mieux de suivre toute l'aventure…

Exemple détaillé

En entrée, on a : $u(t)$. On note donc $e(t) = u(t)$. La transformée de Laplace de l'entrée est alors bien connue : $E(p) = \frac{1}{p}$.

Maintenant, on va supposer que le signal de sortie peut être modélisé selon la formule : $s(t) = (1 - e^{-2t})\ \boldsymbol{u(t)} = u(t) - e^{-2t}\ u(t)$

Rappel :
Le terme $\boldsymbol{u(t)}$ signifie que l'on travaille avec des fonctions causales, juste pour dire que le signal de sortie était nul avant le départ de l'expérience à $t = 0$. Ensuite, pour les temps positifs, le signal de sortie vaut $(1 - e^{-2t})$. La présence du $u(t)$ est indispensable pour calculer la transformée de Laplace. Revoyez si besoin mon cours sur cette affaire…

Bon, on peut facilement calculer la transformée de Laplace de $s(t)$ en utilisant le tableau usuel des transformées… qui est dans un autre coin de mon site… Puisque c'est vous, je vous redonne ce qu'il nous faut :

$f(t)$	$F(p)$
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-at}\,u(t)$	$\frac{1}{p+a}$

On obtient donc : $S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+2} = \frac{2}{p(p+2)}$

Au final, on peut écrire la fonction de transfert : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{2}{p(p+2)}}{\frac{1}{p}} = \frac{2}{p(p+2)}\,p = \frac{2}{p+2}$

Mini rappel sur les fractions ? $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B}\frac{D}{C}$

La fonction de transfert de ce système est donc $\boldsymbol{H(p) = \frac{2}{p+2}}$. Un bon point pour nous.

Il reste à retrouver l'équation différentielle gouvernant le système.

Rappel :
Une équation différentielle du type $s'(t) + k\,s(t) = a\,e(t)$ donne par transformée de Laplace : $pS(p) + kS(p) = a\,E(p)$ (*à condition* de travailler avec des fonctions causales et avec une condition initiale nulle $s(0) = 0$).

Ainsi, on a : $(p + k)S(p) = aE(p)$. La fonction de transfert est donc : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a}{p+k}$.

Et voilà ! En lisant ce rappel en commençant par la fin, on peut donc retrouver l'équation différentielle d'un système dont on connait la fonction de transfert…

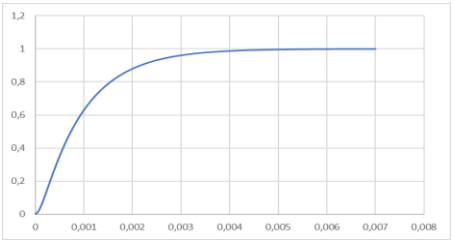
Pour notre exemple, on obtient finalement l'équation : $\boldsymbol{s'(t) + 2\,s(t) = 2\,e(t)}$

Oui, je sais, c'était un exemple facile…… Il vous en faut un autre ??? O.K., on y va…

Mais avant, une petite info sur la notion de « ***réponse impulsionnelle*** »…

Si l'on soumet le système à une impulsion extrêmement brève et très très intense, on peut utiliser le modèle de l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ dont la transformée est égale à 1. Ainsi, lorsque $H(p)$ est connue, on peut déterminer son original $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)]$ qui pourra être qualifiée de *réponse impulsionnelle* (réponse à une impulsion de Dirac).

Situation plus délicate…



Ce signal a été enregistré à la sortie d'un système soumis à un échelon unité. Avec un peu de talent, on peut trouver la modélisation adaptée $s(t) = ae^{bt} + ce^{dt} + 1$ avec les valeurs approchées suivantes :

$a = 0{,}1455\,;\, b = -8872{,}99\,;\, c = -1{,}1455\,;\, d = -1127{,}02.$

Alors, on y va ! La transformée de $s(t)u(t)$ est : $S(p) = a\frac{1}{p-b} + c\frac{1}{p-d} + \frac{1}{p}$ (merci à $u(t)$!)

En mettant tout au même dénominateur : $S(p) = \frac{ap(p-d)+cp(p-b)+(p-b)(p-d)}{p(p-b)(p-d)}$

On simplifie en haut : $S(p) = \frac{(a+c+1)p^2-(ad+cb+b+d)p+bd}{p(p-b)(p-d)}$

On calcule ensuite : $a + c + 1 = 0$; $ad + cb + b + d \approx 0{,}02$; $bd \approx 10000037$

On peut donc légitimement (l'indication serait donnée !!) poser : $S(p) \approx \frac{10^7}{p(p-b)(p-d)}$

En utilisant $e(t) = u(t)$ dont la transformée est toujours $E(p) = \frac{1}{p}$, on peut obtenir la fonction de transfert : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{10^7}{(p-b)(p-d)} = \frac{10^7}{p^2-(b+d)p+10^7} = \frac{10^7}{p^2+10^4p+10^7}$

Rappel :

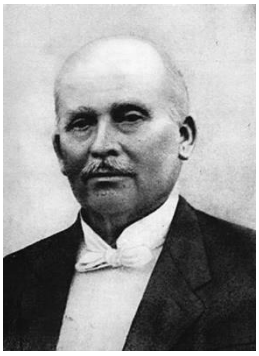
L'équation différentielle $s''(t) + a\,s'(t) + b\,s(t) = c\,e(t)$ a pour transformée de Laplace $p^2S(p) + a\,pS(p) + b\,S(p) = c\,E(p)$ (*à condition* de travailler avec des fonctions causales et avec des conditions initiales nulles $s(0) = 0$ et $s'(0) = 0$).

Ainsi : $(p^2 + ap + b)S(p) = cE(p)$. La fonction de transfert est : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{c}{p^2+ap+b}$.

Merci ! On retrouve l'équation différentielle de départ : $\boldsymbol{s'' + 10^4 s' + 10^7 s = 10^7 e(t)}$

Pour info, j'ai construit cet exercice à partir de l'étude d'un circuit RLC dont la tension de sortie était mesurée aux bornes du condensateur… Les valeurs étaient : $R = 1\ k\Omega$; $L = 0{,}1\ H$; $C = 1\ \mu F$.

En guise de conclusion : un aspect plus théorique



Et si la transformée de Laplace se trompait parfois ? Je veux dire : « Et si deux fonctions différentes $F(p)$ et $G(p)$ admettaient la même transformée inverse ? ». En effet, on doit faire des calculs un peu pénibles pour rechercher un original… La technique permettant de retrouver l'équation serait aussi critiquable… Mais en général, les physiciens ne se soucient guère de ce genre de question, la plupart du temps, tout marche bien, donc pourquoi s'en soucier ?! Merci alors au mathématicien tchécoslovaque Mathias Lerch qui démontre en 1903 que l'on peut effectivement dormir tranquille dans les cas habituellement rencontrés…