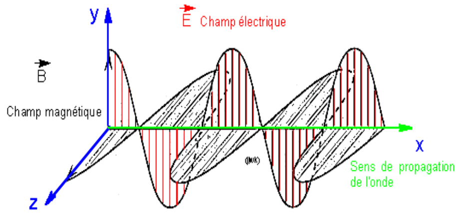
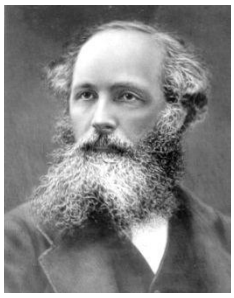


Un peu de lumière…



Les phénomènes électriques et magnétiques (dans le vide) ont été unifiés par Maxwell vers 1870 grâce aux équations ci-contre reliant le champ électrique $\vec{E}$, et le champ magnétique $\vec{B}$.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 & (i) \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & (ii) \\ \overrightarrow{rot}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (iii) \\ \overrightarrow{rot}\, \vec{B} = \mu_o\, \varepsilon_o\, \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (iv) \end{cases}$$

Le but de cette fiche est l'étude des propriétés d'une onde où $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont couplés au sein d'une onde électromagnétique (dont la lumière est un exemple *éclatant*).

Dans ces relations : $\mu_o = 4\pi\ 10^{-7}$ est la perméabilité magnétique du vide

$\varepsilon_o = \dfrac{1}{36\,\pi} 10^{-9}$ est la permitivité électrique du vide

On suppose ici que le champ $\vec{E}$ est de la forme : $\vec{E} = \vec{E}_o\, e^{j(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$

où $\vec{E}_o$ est le vecteur polarisation (constant) $\vec{E}_o = E_{ox}\, \vec{e}_x + E_{oy}\, \vec{e}_y + E_{oz}\, \vec{e}_z$

le repère de travail est orthonormé ($\vec{e}_x$; $\vec{e}_y$; $\vec{e}_z$)

j est le nombre complexe noté *i* en mathématiques (*j* est plus *j*oli)

$\vec{k} = k_x\, \vec{e}_x + k_y\, \vec{e}_y + k_z\, \vec{e}_z$ est le vecteur d'onde (constant) indiquant la direction de propagation de l'onde.

$\vec{r} = x\, \vec{e}_x + y\, \vec{e}_y + z\, \vec{e}_z$ est le vecteur position ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$) du point d'observation.

Etude du vecteur $\vec{E}$

1) Donnez les expressions de A, B et C tels que : $\vec{E} = A\ \vec{e}_x + B\ \vec{e}_y + C\ \vec{e}_z$
2) Calculez alors $\operatorname{div} \vec{E}$. A quelle condition peut-on avoir $\operatorname{div} \vec{E} = 0$?
3) Comment cette condition se traduit-elle pour les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{k}$?

Calcul du vecteur $\vec{B}$

a) Calculez $\overrightarrow{rot}\, \vec{E}$ et $\vec{k} \wedge \vec{E}$.

b) En déduire l'expression de $\vec{B}$ en utilisant la relation (*iii*) (vous prendrez la constante d'intégration nulle). Donnez l'expression de $\vec{B}$ en fonction de ω, $\vec{k}$ et $\vec{E}$.

c) Que peut-on dire des vecteurs $\vec{k}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$?

Energie transportée par l'onde

On pose : $\vec{H} = \dfrac{1}{\mu_o} \vec{B}$ $\quad \vec{e} = \mathrm{Re}(\vec{E})$ $\quad \vec{h} = \mathrm{Re}(\vec{H})$ (Re désigne la partie réelle)

La norme du vecteur de Poynting $\vec{S}$ représente la valeur moyenne sur une période de la grandeur du flux d'énergie traversant l'unité de surface transverse.

Pour calculer $\vec{S}$, on pose : $\vec{P} = \vec{e} \wedge \vec{h}$ et $\vec{S} = \frac{1}{T}\int_O^T \vec{P}\, dt$ avec T défini par $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Pour cette partie, on considère une onde se propageant selon l'axe Oy.

On a donc les champs suivants : $\vec{E} = E_o\, e^{j(k_y y - \omega t)}\, \vec{e}_z$ et $\vec{B} = \frac{k_y}{\omega} E_o\, e^{j(k_y y - \omega t)}\, \vec{e}_x$

α) Calculez $\vec{P} = \vec{e} \wedge \vec{h}$ β) Calculez $\vec{S}$

Equation d'onde

I) En utilisant les relations (*iii*) et (*iv*), montrez que l'on peut écrire : $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{E} + \mu_o\, \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

II) Avec $\vec{E} = E_x\, \vec{e}_x + E_y\, \vec{e}_y + E_z\, \vec{e}_z$, calculez $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{E}$ en fonction des composantes E_x, E_y et E_z.

III) En utilisant la relation (*i*), montrez que l'on peut écrire $\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}$ en fonction de dérivées secondes de E_y et E_z. Faites un travail similaire pour $\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$

IV) Donnez alors une expression plus simple de $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{E}$.

Remarque : le laplacien vectoriel d'un vecteur $\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z$ est le vecteur suivant : $\Delta\vec{u} = \Delta u_x\, \vec{e}_x + \Delta u_y\, \vec{e}_y + \Delta u_z\, \vec{e}_z$

V) D'après Jean le Rond D'Alembert, une onde se propageant à la vitesse v répond à une équation du type : $\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.

Calculez la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique.

Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) n'est pas seulement un expert des équations aux dérivées partielles, il a dirigé avec Diderot la fameuse Encyclopédie !

Le problème est qu'il est impossible de détailler ici les contributions de ce personnage illustre.
Il énonce le théorème disant qu'un polynôme de degré n admet exactement n racines complexes.
Il étudie la convergence des séries numériques.
Il propose une solution à l'aberration chromatique rencontrée par les astronomes.
Dans le discours préliminaire à l'Encyclopédie, il montre ses qualités de philosophe des lumières.
C'est aussi un théoricien de la musique grâce à son analyse du problème physique des cordes vibrantes…