

Espaces vectoriels

Galaxies
en interaction

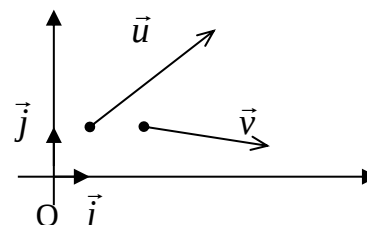


I Introduction

1) Un exemple d'espace vectoriel

Vous savez travailler dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. C'est un exemple d'« espace vectoriel ». Il y a des vecteurs avec lesquels on peut faire des opérations.

On peut faire des combinaisons linéaires avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ex : $\vec{w} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$



On peut : (i) additionner deux vecteurs ; (ii) multiplier un vecteur par un nombre réel. Vous savez aussi travailler avec les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2) Généralisation

Considérons l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, et ayant des coefficients réels. Exemple : $P(x) = 3x^2 + 1$; $Q(x) = x$

Toute combinaison linéaire de ces polynômes donnera un polynôme similaire.

Ex : $3P(x) + 2Q(x) = 9x^2 + 2x + 3 = R(x)$.

Attention, on ne multiplie pas ici deux polynômes entre eux.

C'est un « espace vectoriel » où les vecteurs sont... des polynômes.

Définition

Un espace vectoriel noté (E, K) est un ensemble d'éléments de E appelés « vecteurs » (vecteurs « usuels », polynômes, matrices...) dont on peut calculer des combinaisons linéaires à l'aide de scalaires pris dans l'ensemble K (réels, complexes...) tout en obtenant un résultat restant dans E .

Techniquement : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \forall \alpha \in K$ alors $\alpha \vec{u} + \vec{v} \in E$

3) Les matrices, les polynômes

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n forme un espace vectoriel sur R .

On le note : $(M_n, \mathbb{R})$. En particulier, l'espace vectoriel $(M_2, \mathbb{R})$ des matrices 2×2 .

Soit : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ alors $A + 3B = \begin{pmatrix} a+3e & b+3f \\ c+3g & d+3h \end{pmatrix} \in M_2$

Pour les polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , on note l'espace vectoriel : $(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ (on considère des scalaires réels).

II Base d'un espace vectoriel

1) L'exemple de $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme : $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Ainsi, on peut utiliser les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ pour décrire tous les autres vecteurs.

2) Définitions

Soit (E, K) un espace vectoriel. Tout vecteur de E s'écrit en fonction de vecteurs $\vec{e}_i$ choisis à l'avance. On appelle ces vecteurs des vecteurs de base. Ils forment une base de l'espace (E, K) . On note cette base $(\vec{e}_i)$.

Pour $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: une base est $(\vec{i}, \vec{j})$ Pour $\mathbb{R}_2[X]$: une base est $(1, X, X^2)$

Pour (M_2, R) : une base est formée des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, on a : $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque

Ceci montre que le nombre des vecteurs d'une base est réduit et semble bien déterminé.

Le nombre de vecteurs d'une base, suffisants pour décrire tous les vecteurs de (E, K) , s'appelle la dimension de E . On note : $\dim(E) = n$.

On a : $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ en particulier : $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$\dim(M_n) = n^2$ $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de (E, K) et une base notée $(\vec{e}_i)_n$ avec $n = \dim(E)$. On exprime $\vec{u}$ de manière unique avec les vecteurs de la base choisie selon : $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i$

Les coefficients α_i sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_i)_n$

On note alors $\vec{u}$ sous la forme d'un vecteur colonne : $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \longrightarrow & \text{Pour } \vec{e}_1 \\ & \text{Pour } \vec{e}_n \end{matrix}$

exemples : $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ on note $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P(X) = 2X^3 + X^2 - X + 4$ on note $P = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $(1, X, X^2, X^3)$

Remarques :

(i) Pour un espace vectoriel (E, K) , il existe une infinité de bases possibles.

Par exemple, pour $\mathbb{R}^2$: $(\vec{i}, \vec{j})$ ou $(\vec{i}, -\vec{j})$ ou $(-\vec{i}, \vec{j})$ ou

(ii) Les vecteurs de base se notent aussi sous la forme de vecteurs colonnes.

Par exemple : $\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Notion de sous-espace vectoriel

Soit (E, K) un espace vectoriel de dimension égale à 3 par exemple. On note une base de cet espace par le triplet : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

En prenant juste les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on peut « fabriquer » de nombreux vecteurs, mais on ne peut pas écrire tous les vecteurs de (E, K) . En particulier, dès que $\vec{e}_3$ intervient, ce n'est plus possible.

On appelle l'ensemble des vecteurs s'exprimant seulement à l'aide de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. C'est un espace vectoriel de dimension 2 puisqu'il a deux vecteurs de base. On dit que cet espace vectoriel est inclus dans celui de départ, de dimension 3.

On peut alors « décomposer » un espace vectoriel en plusieurs sous-espaces vectoriels indépendants $E_1, E_2, \dots$. On note : $E = E_1 + E_2 + \dots$

Exemple : Le sous espace engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ peut être décomposé selon :
 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) + (\vec{e}_3)$ Ou alors : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_2, \vec{e}_3) + (\vec{e}_1)$

Soient un espace vectoriel (E, K) , ainsi que $E_1, E_2, \dots$ des sous-espaces vectoriels de E indépendants. Alors, la dimension de E est liée aux dimensions des sous-espaces selon :
 $\dim(E) = \sum_i \dim(E_i)$

Remarque : par définition, un sous-espace vectoriel de E est une partie de E .

III Applications linéaires

La notion d'application linéaire est souvent utilisée en mathématiques, elle se retrouve dans des domaines très variés.

1) La dérivation

Soient g_1 et g_2 deux fonctions dérivables ainsi que a et b deux réels. La fonction $G = a g_1 + b g_2$ est dérivable et l'on a : $G' = a g_1' + b g_2'$

En notant $()'$ l'opérateur dérivation, on a : $(a g_1 + b g_2)' = a (g_1)' + b (g_2)'$

C'est un premier exemple d'application linéaire.

2) Définitions

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K . On les note (E, K) et (F, K) .

On appelle application linéaire de E dans F , toute application f de E dans F telle que :

$$\text{pour tout } \vec{u} \text{ de } E \text{ et tout } a \text{ de } K : f(a \vec{u}) = a f(\vec{u})$$

$$\text{pour tous } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ de } E : f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

On note aussi : $f(a \vec{u} + \vec{v}) = a f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

Exemples : Les rotations et symétries vectorielles dans le plan ou l'espace.
 La dérivation et l'intégration.

Intégration : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 . Soient P ,

Q des éléments de E . Alors : $\int_0^1 a P(x) + Q(x) dx = a \int_0^1 P(x) dx + \int_0^1 Q(x) dx$

Ainsi : $\int_0^1 : E \rightarrow R$ telle que $P \mapsto \int_0^1 P(x) dx$ est une application linéaire.

On appelle l'image de f l'ensemble des éléments de F qui sont l'image d'un élément de E par l'application f . On note cet ensemble $\text{Im}(f)$.

Exemple : On considère $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2

Soit f de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathbb{R}_2[X]$ définie par : $f(P) = P'$

Alors il est évident que $\text{Im}(f)$ est l'ensemble des polynômes de degré ≤ 1

Remarque : dans certains cas simples, il est possible de deviner à l'avance $\text{Im}(f)$, mais en général, cela n'est pas possible.

On appelle noyau de f l'ensemble des éléments $\vec{u}$ de E tels que : $f(\vec{u}) = 0$

On note cet ensemble $\ker(f)$.

Exemple : On considère $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2

Soit f de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathbb{R}_2[X]$ définie par : $f(P) = P'$

Alors, on a $\ker(f) =$ l'ensemble des polynômes constants : $P(X) = a$
(tous ces polynômes ont bien une dérivée nulle)

Remarque : $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E . C'est donc aussi un espace vectoriel.

$\ker(f)$ admet donc une base de dimension donnée. On note cette dimension : $\dim(\ker(f))$

Démonstration :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux éléments de $\ker(f)$. Alors $f(\vec{u}) = 0$ et $f(\vec{v}) = 0$

Ainsi $f(a\vec{u} + \vec{v}) = a f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = 0$ et donc $a\vec{u} + \vec{v}$ est aussi élément de $\ker(f)$

D'où $\vec{u}$ et $\vec{v} \in \ker(f)$ entraîne que $a\vec{u} + \vec{v} \in \ker(f)$

On appelle endomorphisme une application linéaire ayant même espace de départ et d'arrivée.

Exemple : considérons une application linéaire définie par la relation : $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ pour tout vecteur de R^2 . On utilise ainsi un vecteur de R^2 et on obtient un vecteur de R^2 .

Dans la suite du cours, nous allons travailler sur des endomorphismes car ils ont la particularité de pouvoir être représentés symboliquement par des matrices carrées.

3) Notations matricielles

Une situation courante est celle de l'étude des endomorphismes de E dans E . Etudions l'exemple de la dérivation sur les polynômes de $R_2[X]$.

Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ telle que : $P \mapsto P'$

On travaille avec la base $(1, X, X^2)$ qui peut aussi être notée (P_1, P_2, P_3) ou (P_i) .

Soit le polynôme $P(X) = 3X^2 - X + 4$ Avec : $f(P) = P' = 6X - 1$

On a donc : $P = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $P' = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour étudier l'application f , on détermine l'image des vecteurs de la base choisie.

$P_1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $f(P_1) = P_1' = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P_2 = X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $f(P_2) = P_2' = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Enfin, pour $P_3 = X^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a $f(P_3) = P_3' = 2X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ces résultats sont suffisants pour représenter f car on peut écrire, pour tout polynôme

$$P = \sum_{i=1}^3 \alpha_i P_i : f(P) = f\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i P_i\right) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i f(P_i) \quad (\text{puisque } f \text{ est une application linéaire})$$

Ainsi, il suffit de connaître l'image des vecteurs de base pour obtenir l'image d'un polynôme P quelconque. Il suffit d'en connaître les coordonnées dans la base choisie.

On représente alors l'action de f sous la forme d'une matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M est formée par les vecteurs colonne des images des vecteurs de base.

Ainsi, l'action de f sur un polynôme P peut s'écrire sous la forme d'un produit de matrices : $f(P) = P' = M P$ Exemple : Soit $P = 3X^2 - X + 4$ On a $P = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\text{On calcule : } f(P) = P' = M P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0X^2 + 6X - 1$$

Cas général :

On considère un endomorphisme f dans un espace (E, K) de dimension n .

Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ on calcule les images $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$

La matrice M de l'application f est alors :

$$M = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \vec{e}_1 \\ \longleftarrow \vec{e}_n \end{matrix}$$

$f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ \dots \ f(\vec{e}_n)$

On obtient finalement une matrice carrée de n lignes et n colonnes. Les n colonnes correspondent aux images des vecteurs de base.

IV Changement de base

Il faut parfois utiliser différents systèmes de coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques) pour travailler dans R^3 (espace vectoriel sur les réels) dans des bases différentes. Nous allons voir comment passer d'une base à une autre.

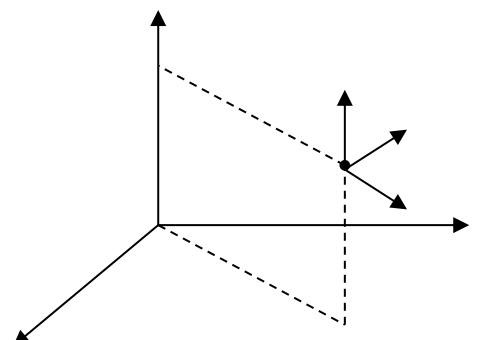
1) Etude d'un exemple

En cartésiennes : la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sera notée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

En cylindriques : la base est $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

(repère local dépendant de θ)

On a le schéma classique suivant :



Avec les relations :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

On écrit alors les vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$ sous la forme de vecteurs colonnes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose alors ce qu'on appelle la matrice de passage de la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ à la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ sous la forme de ces trois vecteurs rassemblés :

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A présent, il reste à voir comment on utilise cette matrice...

Comment utilise-t-on la matrice de passage ?

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de R^3 dont les coordonnées sont données dans la base de départ $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Soit $\vec{u}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ le même vecteur $\vec{u}$, mais cette fois-ci, représenté par ses coordonnées dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Les vecteurs colonnes $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont liés par la relation : $\vec{u} = P \vec{u}'$. Ainsi, quand on connaît $\vec{u}$ dans la base de départ, on peut obtenir $\vec{u}'$ par la formule : $\vec{u}' = P^{-1} \vec{u}$

Exemple : Soit le vecteur $\vec{u} = \vec{e}_r + \vec{e}_\theta + \vec{e}_z$. On a : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, le vecteur $\vec{u}$ s'exprimera sous la forme $\vec{u}' = P^{-1} \vec{u}$

Après avoir calculé la matrice inverse de P, on trouve finalement :

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + \sin\theta \\ -\sin\theta + \cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Généralisation

Soit E un espace vectoriel. Notons B et B' deux bases différentes de E dont les vecteurs sont respectivement $(\vec{e}_i)_n$ et $(\vec{e}'_i)_n$. On suppose les expressions des vecteurs $\vec{e}'_i$ connues

dans la base $(\vec{e}_i)_n$. Par exemple : $\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{pmatrix}$

On appelle **matrice de passage de la base B à la base B'**, la matrice formée par les vecteurs colonne $\vec{e}'_i$ dans la base $(\vec{e}_i)_n$. On la note P.

On a :

$$\begin{array}{ccc}
 P = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_n \\ \vec{e}_1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_n \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} & &
 \end{array}$$

Si l'on considère X , un vecteur colonne de E , on peut l'exprimer dans la base $(\vec{e}_i)_n$. Par ailleurs, on peut aussi exprimer ce même vecteur dans la base $(\vec{e}_i)_n$ en le notant X' . On a alors les relations : $X = P X'$ et $X' = P^{-1} X$

(formules de changement de base pour un vecteur quelconque)

3) Cas d'une application linéaire

Soit M la matrice de l'application linéaire f de E dans E . On suppose que M est donnée dans une base B .

Soit X un vecteur de E .

Notons Y le vecteur image par f du vecteur X .

On écrit : $Y = f(X)$ On a donc : $Y = M X$ (i)

On souhaite à présent travailler dans une autre base B' . La matrice de passage de B à B' est notée P .

On sait alors que : $Y = P Y'$ et $X = P X'$

(où Y' et X' sont donnés dans la base B')

Alors, la relation (i) s'écrit : $P Y' = M P X'$ D'où : $Y' = P^{-1} M P X'$

Sachant que dans la base B' on a : $Y' = M' X'$ on en déduit l'expression de la matrice M' (matrice de l'application f exprimée dans la base B') :

$$\underline{M' = P^{-1} M P} \qquad \text{On a aussi : } \underline{M = P M' P^{-1}}$$

Ces deux formules sont les formules de changement de base pour les matrices.

L'intérêt d'un changement de base, c'est d'obtenir une nouvelle matrice plus simple qui permet par la suite certains calculs (par exemple le calcul de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice : M^n).

Quelques exercices typiques...

I Le bras (OA) d'un robot pivote autour du point O. En A, il porte un laser à infrarouge qui perce des trous à intervalles angulaires réguliers d'angle θ . Le premier trou (T_1) a ses coordonnées définies par le vecteur $\vec{T}_1 = (2 ; 1)$.

- 1) Avec la matrice de rotation R définie par $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ calculez le vecteur $\vec{T}_2$ des coordonnées du second trou selon : $\vec{T}_2 = R \vec{T}_1$
- 2) En utilisant la fameuse relation $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ démontrez que l'angle entre les vecteurs $\vec{T}_2$ et $\vec{T}_1$ vaut bien θ .

II Un robot (ils sont partout...) est programmé pour effectuer des soudures. Ces dernières doivent respecter une symétrie par rapport à une pièce plane d'équation : $x + y + 2z = 0$. Pour cela, on calcule la matrice $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ représentant cette symétrie. Mais avant de

souder, il faut vérifier si la matrice est correcte... (en effet, le calcul de cette matrice n'est pas simple, des zébreurs peuvent arriver...). Vérifions quelques points :

- 1) Calculez M^2 . Expliquez pourquoi votre résultat est celui qu'il fallait obtenir.
- 2) L'image d'un vecteur $\vec{U} (a ; b ; c)$ par la matrice M doit donner un vecteur de même norme. Calculez : $\|\vec{U}\|$; $\vec{V} = M \vec{U}$; et enfin $\|\vec{V}\|$ Conclusion ?
- 3) Soit un point P de coordonnées (a ; b ; c) appartenant au plan de la symétrie. On note $\vec{U} = \overrightarrow{OP}$ le vecteur lié au point P. Quelle relation a-t-on entre les coordonnées du point P (a, b et c) ? Simplifiez alors l'expression du vecteur $M \vec{U}$ et justifiez le résultat obtenu.
- 4) Déterminez l'ensemble des vecteurs $\vec{w} (d ; e ; f)$ tels que : $M \vec{w} = -\vec{w}$

III Soit B la base habituelle de $\mathbb{R}^2$ définie par les vecteurs : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit B' la base de $\mathbb{R}^2$ définie par les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 e_1 + 1 e_2$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 e_1 + 2 e_2$

- 1) Donnez la matrice de passage de la base B à la base B'.
- 2) Soit $V = e_1 + 3 e_2$. On souhaite déterminer les réels α et β tels que l'on ait $V = \alpha u_1 + \beta u_2$. Pour cela, on peut :
 - a) Exprimez les vecteurs e_1 et e_2 en fonction de u_1 et de u_2 (cherchez des relations du type $e_1 = \dots u_1 + \dots u_2$ et $e_2 = \dots u_1 + \dots u_2$) Déterminez ensuite les réels α et β cherchés.
 - b) Utilisez la matrice P pour retrouver le résultat en utilisant le cours : « $X' = P^{-1} X$ »

IV Soit $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Pour calculer M^n , on utilise un changement de base : on passe de la base usuelle (1;0) et (0;1) à la base (1;1) et (1;-1) avec la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Calculez P^{-1} Rappel : si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- b) Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Vérifiez que l'on a : $P D P^{-1} = M$ c) Calculez alors M^n
- d) Vérifiez votre résultat en prenant $n = 2$ et en comparant l'expression avec M^2 .