Les équations

L'un des objectifs de base du BTS est de vous rendre à l'aise avec « l'art » de résoudre les équations.

Rappel : résoudre une équation signifie : « Il s'agit de trouver quelle valeur de x peut bien vérifier une relation imposée ».

Par exemple : $3\,x - 1 = 0$ Quelle est la valeur de x qui « marche » ?

Méthode possible : le pifomètre

essayons avec $x = 2$ $3 \times 2 - 1 = 5$ bof… ça fait pas 0

et avec $x = 0{,}5$ (?) $3 \times 0{,}5 - 1 = 0{,}5$ On se rapproche…

Moralité : pour résoudre une équation, il faut suivre une méthode rigoureuse… sinon, on peut y passer pas mal de temps.

Point historique : les équations sont étudiées depuis fort longtemps. On en trouve des traces sur des tablettes d'argile de l'époque babylonienne (soit 1700 ans avant notre ère). A cette époque, les problèmes posés étaient très concrets : « Quelle surface de base doit avoir un silo pour y stocker la récolte de blé… ».

I Les équations du premier degré

Ce sont des équations du genre : $3\,x + 1 = 2 - 4\,x$ On y trouve des x et des nombres. Le but du jeu est bien sûr d'arriver à connaître la valeur de x (aussi appelé l'inconnue). Donc, à la fin de votre travail, on doit avoir : $x = \ldots\ldots$

Méthode : * Mettre les x à gauche du signe = <u>et</u> * Mettre le reste à droite.

Règles : * Changer le signe d'un terme qui passe de l'autre côté au même étage.
* Garder le signe d'un terme qui passe de l'autre côté en changeant d'étage.

Exemple : $3\,x + 1 = 2 - 4\,x$ donc : $3\,x + 4\,x = 2 - 1$ soit : $7\,x = 1$

Alors, on obtient : $x = \dfrac{1}{7}$

Remarque : $\dfrac{1}{7} = 0{,}142857142\ldots..$ Valeur impossible à trouver avec la méthode du « pifomètre ».

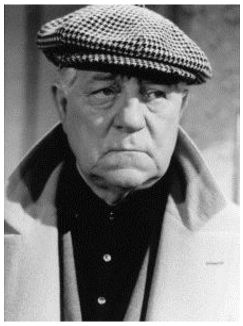
D'où l'importance du calcul avec des x et des fractions…

Autre exemple : $2\,x - 3 = 2 + 5\,x$ donc : $2\,x - 5\,x = 2 + 3$ soit : $-3\,x = 5$

Finalement : $x = \dfrac{5}{-3}$ (ce qui donne environ $-1{,}67$)

Exercices : I ; II ; III ; IV

II Les systèmes d'équations



Peut-être connaissez-vous les problèmes amusants du genre :

Conversation entendue au marché :

- Je prends deux casquettes et trois ceintures…
- *Bien ça vous fera 31 euros !*
- Ah, mince, j'ai pas assez… il me manque un euro…
- *Bon, ben prenez trois casquettes et deux ceintures, ça vous fera 29 € !!*

Question : quel est le prix de chaque article ? Pas si facile…….

Pour ce genre de problème, il faut noter : x = prix d'une casquette
y = prix d'une ceinture

Alors, on traduit la conversation : $\begin{cases} 2x + 3y = 31 \\ 3x + 2y = 29 \end{cases}$

C'est ça un système d'équations : il y a <u>deux</u> équations avec <u>deux</u> inconnues (x et y)
Pour trouver la solution à un tel problème, il n'y a pas trente-six tactiques…
En fait, dans ce cours, une seule est autorisée……..

* faire partir les x (pour ne plus être embêté par les y). Mais comment ???

Allez, je le fais au tableau…

Remarques : - « faire partir » les y est aussi possible !
- pour « faire partir », on doit parfois additionner les deux lignes.

Exercice V

III Manipulation de formules : des équations particulières

Le grand classique du BTS consiste à vous donner une formule qu'il faut modifier pour en extraire une inconnue.

Exemples :

1) Loi d'Ohm (1789 – 1854, physicien allemand ci-contre)

U = Tension aux bornes d'une résistance ; R = Résistance ; I = Intensité du courant

Formule générale (trouvée après de nombreuses expériences) : $U = R\,I$

On vous donne : U = 12 Volt R = 135 Ohm. Question : « Combien vaut I ? »

On part de $U = R\,I$ et on divise tout par R d'où : $\frac{U}{R} = I$. Soit : $I = \frac{12}{135} = 0{,}089$ A.

2) Loi de pression

La pression (en Pascal ci-contre) exercée sur une surface S (en m^2) sous l'action d'une force F (en Newton) s'exprime selon la formule : $P = \frac{F}{S}$

Blaise Pascal (1623-1662) demande en 1647 à son beau-frère de monter sur le Puy de Dôme (jusqu'à 1000 m) pour étudier les variations de la pression atmosphérique… Pascal écrit ensuite un traiter sur la question.

Question n°1 :
« Une surface de 0,3 m^2 subit une pression égale à 20 000 Pascal. Quelle est la force exercée sur cette surface ? ».

On cherche F, donc, il faut modifier la formule selon l'astuce suivante :

Sachant que $\frac{6}{1} = 6$ (en accord avec ma calculette), on peut toujours écrire : $P = \frac{P}{1}$.

Alors, la formule générale devient : $\frac{P}{1} = \frac{F}{S}$ et on peut faire un produit en croix.

Ceci donne : $P \times S = 1 \times F$. Soit : $P\,S = F$

Finalement : $F = 20\,000 \times 0{,}3 = 6000$ N.

Question n°2 :
« Une surface S subit une force égale à 800 N ce qui génère une pression de 5 000 Pa. Quelle est la surface concernée ? »

Ici, la question demande d'isoler S. On repart de $\frac{P}{1} = \frac{F}{S}$ pour écrire : $P\,S = F$

Ensuite, en divisant par P, on obtient : $S = \frac{F}{P}$. Soit : $S = \frac{800}{5\,000} = 0{,}16\ m^2$.

Moralité : à partir d'une relation, d'une formule, on peut vous demander une transformation dans le but d'isoler une grandeur.

Cela s'écrit sous la forme suivante :
« Sachant que $P = \frac{F}{S}$, donnez l'expression de S en fonction de P et F »

Ce qui signifie : donnez la formule qui donnera S. On avait trouvé : $S = \frac{F}{P}$

Exercice VI

IV Les droites : notions de base

Nous verrons bientôt le rapport avec les équations…

1) Tracer une droite

Comment trace-t-on une droite d'équation $y = 2x - 3$ (par exemple) ?

Technique n°1

On place deux points A et B dont on calcule les coordonnées.

Avec $x = \mathbf{0}$ (toujours conseillé) on obtient : $y = 2 \times \mathbf{0} - 3 = -3$ → A(0 ; – 3)

Avec $x = \mathbf{4}$ (par exemple) on obtient : $y = 2 \times \mathbf{4} - 3 = 5$ → B(4 ; 5)

On place les deux points et on trace…

Technique n°2

L'équation $y = 2x - 3$ raconte…

- la droite coupe l'axe vertical en –3
- la droite a « 2 » pour coefficient directeur

Alors, on fait :

- Monsieur, et si on a : « $y = -3x + 4$ » ??

Donc : Le coefficient directeur (le nombre devant x) indique si la droite monte (coeff > 0) ou si elle descend (coeff < 0)

Remarque :
Si une droite $y = ax + b$ est donnée avec a = 0, elle est parallèle à l'axe des abscisses. Exemple : $y = 2$ (à dessiner)

Remarque historique :
Représenter une droite dans un repère force à un gigantesque bon dans l'histoire des mathématiques puisque René Descartes (1596-1650) est à l'origine de la notion de « repère cartésien ».

2) Au fait, et le rapport avec les équations ??

Exemple 1 : Résoudre graphiquement l'équation : $2\,x - 3 = 0$
On trace la droite $y = 2\,x - 3$ puis on regarde où elle coupe l'axe des x

Exemple 2 : Résoudre graphiquement l'équation $2\,x - 3 = -\,3\,x + 4$
On trace les droites $y = 2\,x - 3$ et $y = -\,3\,x + 4$
La solution est la valeur de x où elles se croisent.
Remarque : vérifions en résolvant l'équation…

Dernière info de dernière minute…

On nous donne une droite passant par deux points dont les coordonnées sont : A $(x_A\,;\,y_A)$ et B$(x_B\,;\,y_B)$.

On peut calculer le coefficient directeur de cette droite en faisant : Coeff $= \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exemple de notre droite passant par A(0 ; – 3) et B(4 ; 5)

On obtient : coeff $= \dfrac{5-(-3)}{4-0} = \dfrac{8}{4} = 2$

Du coup, on sait que la droite a une équation du genre : $y = 2\,x + b$

Et peut ensuite trouver « b » en remplaçant les coordonnées d'un point dans la relation.

Prenons le point B(4 ; 5). Il doit vérifier : $5 = 2 \times 4 + b$
Soit : $5 = 8 + b$ Ce qui donne : $b = -3$
Finalement, on retrouve l'équation : $y = 2\,x - 3$

Exercice VII

Quelques équations…

I Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante vérifiée par x : $\int_{-x}^{x} e^{t}\ \mathrm{d}t = 1$

(remarque : si vous n'y arrivez pas, passez à l'exercice II)

II Résoudre les équations suivantes :

a) $2\,x - 3 = -x + 6$
b) $4 + 2\,x = -3\,x + 7$
c) $-3 - 4\,x = 2\,x + 7$

III Sur une vieille tablette retrouvée tout à fait par hasard dans un champ, j'ai pu déchiffrer le texte suivant (à l'origine en sumérien) :

« Sur une assiette, j'ai fait une marque sur le bord, pour ensuite lui faire faire un tour sur une table. Ainsi, j'ai pu mesurer sa circonférence : 50,3 cm. Ensuite, j'ai mesuré le diamètre de l'assiette : 16 cm. J'ai ainsi pu obtenir la valeur de π ! En effet, ℵ ℘җҊق🕸ര♍✿ »

Et là, impossible de lire la suite… Pouvez-vous retrouver une valeur approchée de π en utilisant ces données *expérimentales* ?

IV Deux fournisseurs A et B proposent leur formule pour l'achat de ramettes de papier, le prix de x ramettes est donné selon : $p_A = 2{,}46\,x + 35$ et $p_B = 2{,}44\,x + 42$

1) Calculez les prix des deux fournisseurs pour $x = 130$ ramettes puis pour $x = 430$.
2) On souhaite réaliser des économies sur l'achat du papier. Donc, on veut calculer à partir de quelle valeur de x il devient préférable de choisir le fournisseur B.
Pour cela : a) Quelle équation doit-on écrire ? puis : b) Résoudre l'équation. Conclure.

V Résoudre les systèmes : a) $\begin{cases} 3\,x + y = 7 \\ 5\,x + 2\,y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\,x + y = 7 \\ -3\,x + 3\,y = -24 \end{cases}$

VI 1) La puissance (en Watt) d'un appareil électrique est liée à U (tension en V) et à I (intensité en A) selon la formule : $P = U\,I$

Calculez I sachant que : $P = 105$ W et $U = 220$ V.

2) La puissance peut aussi (ah, les physiciens…) être donnée selon la formule : $P = R\,I^2$

a) Calculez la résistance R lorsque : $P = 260$ W et $I = 0{,}13$ A.
b) Calculez l'intensité I dans le cas où : $P = 20$ W et $R = 120$ Ohm.

3) Le volume d'un cône de hauteur h et rayon R est donné par : $V = \dfrac{1}{3}\pi\,R^2\,h$

a) Donnez l'expression de h en fonction de V et R.
b) Donnez l'expression de R en fonction de h et V.

VII Représentez les droites d'équations respectives : $y = -2\,x + 3$ et $y = 2\,x - 1$

1) Déterminez graphiquement les coordonnées du point d'intersection.
2) Retrouvez enfin ses coordonnées exactes en résolvant une équation.