Équations différentielles

A ce stade, vous êtes « expert » en équations du type $3\,x - 6 = 0$ (enfin je l'espère, sinon, il faut réviser…). Résoudre une équation, c'est trouver *x*, un nombre réel vérifiant l'équation. Dans ce cas : $x = 2$.
Nous allons ici aller plus loin ! **Résoudre une équation différentielle, c'est trouver une fonction** vérifiant une relation donnée…

Introduction

1. Approche du problème

On considère : $f\,(x) = 5\,\mathrm{e}^{3\,x}$ Sa dérivée est : $f\,'(x) =$ ……………………

On remarque alors que : $f\,'(x) - 3\,f\,(x) =$ ………………………………………….

« La fonction f est solution de l'équation *différentielle* (E) notée : ………………… »
(on y retrouve *f* ainsi que sa *dérivée f '*).

Remarque : Au niveau BTS, écrire $f\,(x)$ ou *f*, n'est pas pénalisant…

Rappel : Il existe de nombreuses fonctions : *f* ; *g* ; *h*… On écrit : $y = f\,(x)$ pour donner les coordonnées d'un point M $(x\,;\,y)$ situé sur la courbe représentative de la fonction *f*.
On note aussi M $(x\,;\,y = f\,(x))$.

Finalement, ce qui compte, ce n'est pas la lettre de la fonction (*f*, *g* ou *h*…), c'est le fait que la valeur de *y* corresponde à la fonction au point d'abscisse *x*.
Pour cette raison, on peut noter une fonction avec la notation générale *y*.
Ainsi, l'équation $f\,' - 3\,f = 0$ est notée : $y' - 3\,y = 0$.
Dans cette équation, *y* est une fonction de *x*. Pour y penser, on peut l'écrire $y(x)$.

Résumons : La fonction $f\,(x) = 5\,\mathrm{e}^{3\,x}$ est solution de l'équation (E) $y' - 3\,y = 0$.

Petites questions :

- La fonction $g(x) = 1{,}2\,\mathrm{e}^{3\,x}$ est-elle solution de : $y' - 3\,y = \mathbf{0}$?
  Réponse : oui, il suffit de calculer $g' - 3\,g$ pour trouver ………
- Pouvez-vous trouver encore une autre solution de (E) ?
  Réponse : il suffit de changer le 1,2 par n'importe quel nombre…
- Pouvez-vous écrire toutes les solutions de l'équation (E) ?
  Réponse : pourquoi pas, mais cela prendrait du ……………………

Peut-on trouver une « moralité » à tout ceci ? Oui…
Une équation différentielle est une équation spéciale car la solution cherchée n'est pas une valeur, c'est une fonction !
Et pour finir, il existe une …………………… de solutions pour une équation de ce type.

Astuce : On note *toutes* les solutions de (E) sous la forme : $y(x) =$ ………………..
C est une constante pouvant prendre n'importe quelle valeur.

Exemples : pour $C = 5$ on dira : $f(x) = 5\,e^{3x}$ est solution de (E)
pour $C = 1{,}2$ on dira : $g(x) = 1{,}2\,e^{3x}$ est solution de (E)

2. Approche historique

Newton et Leibniz (l'anglais à gauche, l'allemand à droite) ont été les premiers à étudier la notion de dérivée vers 1680. Les équations différentielles sont très utiles en physique : elles décrivent bien le comportement des systèmes étudiés dans de nombreuses situations : circuits électriques, ressorts oscillants, étude d'un corps en chute libre…

On trouve les équations différentielles dans des domaines variés : mathématiques, physique, chimie, économie… Soulignons enfin que ces équations sont souvent complexes, la plupart du temps, il faut un ordinateur pour calculer les solutions. Certaines équations sont graphiquement très belles : $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$

I. Équation différentielle du premier ordre

D'une manière générale, ce genre d'équation relie une fonction y et sa dérivée y'.

1. L'équation $y' + a\,y = 0$ avec a un coefficient réel

Exemples : si $\boldsymbol{a} = 2$ l'équation est : $y' + 2\,y = 0$.
si l'équation est $y' - 8\,y = 0$ alors $\boldsymbol{a} =$ …………

Remarque IMPORTANTE : et si on vous propose l'équation : $\mathbf{2}\,y' + 7\,y = 0$?

Alors, vous devez diviser cette équation par **2** pour avoir une écriture de la forme :
$y' + \boldsymbol{a}\,y = 0$. C'est très important…
L'équation est alors : $y' + 3{,}5\,y = 0$ (le coefficient devant y' est 1 : good…).

Théorème L'équation $y' + \boldsymbol{a}\,y = 0$ admet les solutions : $y(x) =$ …………………..
où C est une constante réelle.

Application à l'équation (E) : $y' + 7\,y = 0$.
Toutes les solutions de (E) sont de la forme : $y(x) =$ …………………...
Par exemple, $y(x) = 3\,e^{-7x}$ et $g(x) = 1{,}6\,e^{-7x}$ sont des solutions de l'équation.

Remarque : il est conseillé de savoir appliquer ce théorème « par cœur ».

Pour vérifier si tout va bien, prenons par exemple : $y(x) = 3\,e^{-7x}$ (pour $C = 3$).

La dérivée de y est : $y'(x) =$ ………………………………………

Alors, le calcul de $y' + 7\,y$ donne : ……………………………………………………

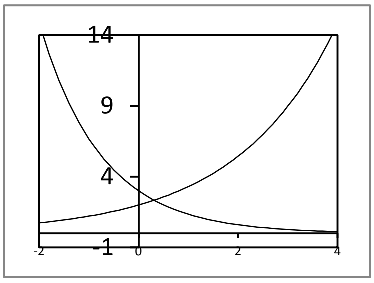
La fonction proposée vérifie bien l'équation (E) car on trouve 0 à la fin. (Par la suite, il ne sera plus nécessaire de faire cette vérification…).

Remarque :
Parfois (très très rare…) le sujet de BTS propose une équation du type $y' + 4\,x\,y = 0$.
Le terme « $4\,x$ » devant le y change tout ! En effet, ce n'est pas une constante comme dans les cas précédents. Dans un tel cas, il faut :

a) prendre la primitive de ce « $4\,x$ ». On obtient $4 \times (1/2\ x^2) = 2\ x^2$.
b) mettre cette primitive dans l'exponentielle : la solution est $y(x) = C\ \mathrm{e}^{-2x^2}$.
(n'oubliez pas de changer le signe…).

- *Autre équation du même genre* : $x\,y' - y = 0$.
  Il faut tout diviser par x pour avoir y' tout seul en tête : $y' - \frac{1}{x}\,y = 0$.
  On prend la primitive du terme $\frac{1}{x}$: c'est $\ln(x)$.
  Et on annonce : « La solution est de la forme : $y(x) = C\ \mathrm{e}^{\ln(x)}$ ».

2. Représentation graphique des solutions

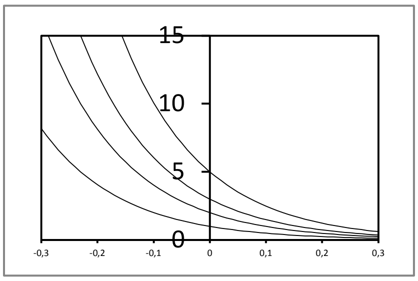


Vous vous rappelez sans doute la forme des fonctions exponentielles…

Voyons deux exemples tout de même :

- $f(x) = 2\ \mathrm{e}^{0,5\,x}$ (la courbe qui monte).
- $g(x) = 3\ \mathrm{e}^{-0,8\,x}$ (la courbe qui descend).

Revenons à l'équation « $y' + 7\,y = 0$ », ses solutions sont du type $y(x) = C\ \mathrm{e}^{-7\,x}$.



On peut en tracer des exemples en changeant juste la constante devant l'exponentielle :
$y(x) = \mathrm{e}^{-7\,x}$; $y(x) = 2\ \mathrm{e}^{-7\,x}$; $y(x) = 3\ \mathrm{e}^{-7\,x}$;
ou bien encore $y(x) = 5\ \mathrm{e}^{-7\,x}$.

Remarque : elles ne se coupent jamais !

Il existe donc une infinité de solutions mais on peut en choisir une en imposant une condition…

Exemple : quelle est l'unique fonction du type $y(x) = C\ \mathrm{e}^{-7\,x}$ passant par le point A (0 ; 3) ?

Elle vérifie : $y(0) = 3$. Donc, on veut : $y(0) = C\ \mathrm{e}^{-7 \times 0} = C\ \mathrm{e}^0 = 3$ (car $\mathrm{e}^0 = 1$).
(on a remplacé x par 0)

Ce qui donne la constante : $C = 3$.

L'unique fonction solution de (E) **et qui passe en A** est donc : $y(x) = 3\ \mathrm{e}^{-7x}$.

On peut aussi vous imposer une condition sur la pente de la fonction en un point…

- **Exemple**

On cherche les fonctions solutions de l'équation (E) : $y' - 2y = 0$.
En plus, on cherche celle qui passe au point B de coordonnées (0 ; 5).

La forme générale des solutions est : $y(x) = C\,e^{2x}$. On en cherche une spéciale (notée *f de la même forme, donc :* $f(x) = C\,e^{2x}$) qui vérifie le passage en B.
Donc : $f(0) = 5$. Ce qui donne $C = 5$ car $f(0) = C\,e^0 = C$.
Finalement, la solution cherchée est : $f(x) = 5\,e^{2x}$.

Question en supplément : « Déterminez la fonction *g*, solution de (E) qui admet une pente égale à 3 au point d'abscisse 0 ».

Ici, la condition porte sur la dérivée de la solution, on veut : $g'(0) = 3$
On pose *g* du genre : $g(x) = C\,e^{2x}$. On a : $g'(x) = 2\,C\,e^{2x}$ puis : $g'(0) = 2\,C$.
On écrit donc : $2\,C = 3$. Ce qui donne $C = 1{,}5$ Alors : $g(x) = 1{,}5\,e^{2x}$.

- **Exercices** de base : I ; II ; III (voir la partie **III**).

3. Équation : *y'* + *a y* = *k*(*x*) (*k*(*x*) est le « second membre »)

Exemple typique : (E) $y' + 2y = x + 3$. Ici, le terme $k(x)$ est $x + 3$.

Le plan de résolution (en quatre étapes) pour une équation de ce genre est :

PLAN de résolution.

a. *D'abord* résoudre l'équation $y' + 2y = 0$: ……………………….

b. *Ensuite,* on cherche une autre solution appelée *solution particulière* de l'équation (E). On peut noter cette solution $y_p(x)$ pour s'y retrouver. (à voir bientôt…)

c. *Puis,* « l'ensemble des solutions » de (E) est donné par la somme des deux fonctions précédentes : $y(x) = C\,e^{-2x} + y_p(x)$

d. *Enfin*, on vous demande de déterminer la constante *C* en imposant une condition (parfois appelée « condition initiale »). Exemple : $y(0) = 3$

Pendant l'examen, vous cherchez la solution de l'équation sans le second membre : c'est souvent la question 1).
Ensuite, dans la question 2), on vous demande de déterminer une solution particulière $y_p(x)$. (technique bientôt étudiée, soyez patient…)
La question 3) demande « *l'ensemble des solutions* » de l'équation (E). C'est ici que vous devez faire la somme des deux fonctions précédentes.

La question 4) propose de déterminer l'unique solution vérifiant une condition imposée.
Remarque : parfois ces étapes sont « compressées » en trois ou bien deux étapes…

Et la fameuse solution particulière ? Comment la trouver ?

Deux méthodes existent… Je les note ici M1 et M2 (« M » pour méthode…).

- ✓ **Méthode M1. C'est la plus simple, on vous donne son expression !**

Il faut remplacer l'expression de la fonction proposée dans l'équation pour voir si ça marche.
Etudions cette affaire en détail pour notre équation (E) : $y' + 2y = x + 3$.

Le texte du BTS dirait :
« Montrez que $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ est une solution particulière de l'équation (E) ».

On dérive f : $f'(x) =$

Et on calcule : $f' + 2f$ car l'équation est $\boldsymbol{y' + 2y} = x + 3$.

Donc : $f' + 2f =$

Le calcul de $f' + 2f$ redonne bien comme résultat le « $x + 3$ » espéré (visible de l'autre côté du signe = dans l'équation (E)).
Vous concluez : « f est bien solution particulière de l'équation (E) ».

- ✓ **Méthode M2. On vous propose un indice…**

Le texte du BTS dirait :

« Déterminez les réels a et b pour que la fonction $g(x) = a\,x + b$ soit une solution particulière de (E) ».
Ici, a et b sont des constantes qu'il faut trouver…
Pour cela, on calcule : $g'(x) = a$.
Ensuite, selon le début de l'équation (E) « $y' + 2y = x + 3$ », on calcule : $g' + 2g$.

Soit : $g' + 2g =$

A ce moment, on dit qu'il faut avoir : $g' + 2g = x + 3$ (d'après (E)).

Soit :

Pour avoir *la même chose* des deux côtés, il faut comparer les termes avec x et les termes sans x (ce qui reste) de chaque côté du signe =.
Ici, on a : Pour les x : « $2a$ » à gauche et « 1 » à droite (car $x = 1x$).
Pour le restant : « $a + 2b$ » à gauche et « 3 » à droite.

On pose donc : $\begin{cases} 2\,a = 1 \\ a + 2\,b = 3 \end{cases}$. Il faut résoudre ce petit système.

La première ligne donne *a* = 1/2 que l'on reporte dans la seconde ligne pour trouver *b*. Soit : 1/2 + 2 *b* = 3. D'où : 2 *b* = 3 – 1/2 = 5/2. Ainsi : *b* = 5/4.
On obtient finalement : *g*(*x*) =1/2 *x* + 5/4.

Nous en sommes à **l'étape c.** :
Répondons à la question : « Donnez l'ensemble des solutions de (E) ».

L'ensemble des solutions pour notre exemple est donné par la *somme* suivante :

$y(x) = C\,e^{-2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ (il n'y a rien d'autre à faire ici !).

Pour finir, **l'étape d.** :
On vous demande **la** (l'unique) solution qui vérifie une condition imposée… Pour notre exemple le texte dirait :
« Déterminez la solution particulière *h* qui vérifie la condition : *h*(0) = 2 ».

Tout d'abord, on pose *h* de la forme : $h(x) = C\,e^{-2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

On calcule ensuite : *h*(0) =

Or, on souhaite *h*(0) = 2. Donc, on écrit :

Finalement : $h(x) = \frac{3}{4}\,e^{-2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ est la fonction demandée.

Remarque : on peut vérifier que la condition *h*(0) = 2 est bien vérifiée en calculant :
$h(0) = 3/4\,e^0 + 5/4 = 3/4 + 5/4 = 2$ (ça marche…).

Résumons : pour résoudre l'équation *y*' + *a y* = *k*(*x*).

a. Chercher les solutions de l'équation : *y*' + *a y* = 0.
b. Déterminer une solution particulière.
c. L'ensemble des solutions est la somme des étapes a. et b.
d. On trouve **la** solution vérifiant une condition donnée.

Info : parfois, le texte de l'examen précise « Résoudre l'équation sur [0 ; +∞[».
Cela ne change rien à notre travail. Ne vous inquiétez pas de cela, c'est juste pour dire : « On souhaite travailler avec des valeurs positives de *x* ».

- **Exercices** de base : IV à VI (voir dans la partie **III**).

II. Équations différentielles du second ordre

Rassurez-vous, nous n'irons pas jusqu'au troisième ordre…

Notez bien : y'' est $(y')'$. La fonction est dérivée *deux fois* (f'' se lit « f seconde »).

1. L'équation $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$

Par exemple, on peut avoir : $y'' - 5\,y' + 6\,y = 0$.

Méthode de résolution *: consultons le formulaire du BTS (ci-dessous).*

$\boldsymbol{a\,x'' + b\,x' + c\,x = 0}$ équation caractéristique : $a\,r^2 + b\,r + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda\, e^{r_1 t} + \mu\, e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda\, t + \mu)\, e^{r t}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique

Notez bien : la fonction notée habituellement « y » dans le sujet de l'examen est notée « x » dans ce formulaire (cela perturbe beaucoup les candidats…).

D'abord, on identifie les coefficients de l'équation :

a = ……. (devant le y'') ; b = ……….. (devant le y') ; c = ……….. (devant le y).

On pose ensuite l'« équation caractéristique » $a\,r^2 + b\,r + c = 0$.
Dans notre cas : $r^2 - 5\,r + 6 = 0$. Il faut la résoudre en supposant que r est l'inconnue.

On calcule le fameux delta : $\Delta = b^2 - 4\,a\,c =$

On calcule les deux solutions : $r_1 =$ et $r_2 =$

Ensuite, on passe à droite dans le formulaire.
Comme $\Delta > 0$, on utilise la première ligne à droite…

Les solutions sont donc : $y(x)$ = ……………………………… où λ et μ sont des réels.

Ou encore : $y(x)$ = ………………………………….. où A et B sont des réels.

(pour ceux qui n'aiment pas les lettres grecques…)

Commentaires sur le tableau (formulaire du BTS)…

- lorsque Δ est nul, on a une seule racine notée r et la solution de l'équation est du type : $y(x) = (A\,x + B)\,e^{r\,x}$
- il existe une ligne pour le cas $\Delta < 0$ mais qui n'est jamais proposée dans le groupement C.

- la solution de l'équation est ici notée $f(t)$ où t est la variable qui est notée x en général dans les examens de BTS (encore une perturbation pour vous).

- **Exercices** de base : VII à X (toujours dans la partie **III**).

2. L'équation : $a\,y'' + b\,y' + c\,y = k(x)$

La méthode à suivre est **exactement** la même que celle exposée pour les équations du premier ordre.

Un petit exemple tout de même ? Ci-dessous le texte d'un exemple classique.

Résoudre l'équation (E) : $y'' - 5\,y' + 6\,y = (24\,x - 2)\ e^{-x}$

a) Résoudre l'équation : $y'' - 5\,y' + 6\,y = 0$.
b) Montrez que $f(x) = (2\,x + 1)\ e^{-x}$ est une solution particulière de (E).
c) Donnez alors la forme des solutions de (E).

Solution commentée :

a) Vous venez de le lire au-dessus : $y(x) = A\,\mathrm{e}^{2x} + B\,\mathrm{e}^{3x}$.
b) Il faut calculer f', f'' puis remplacer ces expressions dans la partie gauche de l'équation (E).
Soit : $f(x) = (2\,x + 1)\ e^{-x}$. f est de la forme $u\,v$ (multiplication des fonctions $u = 2\,x + 1$ et $v = e^{-x}$). Donc, la dérivée sera $(uv)' = u'v + uv'$ d'après le cours sur les fonctions.

On détermine donc : $u' =$ ……. et $v' =$ …………..

On a alors : $f' =$

On a mis l'exponentielle en facteur. Soit : $f' = [2 - (2\,x + 1)]\ e^{-x} = [-2\,x + 1]\ e^{-x}$

Il reste à dériver f' pour trouver f''. On procède de la même façon car f' est encore sous la forme d'un produit : $f' = u\,v$ avec cette fois-ci $u = -2\,x + 1$ et $v = e^{-x}$.
On détermine : $u' = -2$ et $v' = -\,e^{-x}$
Alors : $f'' = -2\ e^{-x} + (-2\,x + 1)\,(-e^{-x}) = [\,-2 + (-2\,x + 1) \times (-1)\,]\ e^{-x}$
$= [\,2\,x - 3\,]\ e^{-x}$

Enfin, on calcule : $f'' - 5\,f' + 6\,f$ (aux petites erreurs de signe…) :

$$\begin{aligned} f'' - 5\,f' + 6\,f &= (2\,x - 3)\ e^{-x} - 5\,(-2\,x + 1)\ e^{-x} + 6\,(2\,x + 1)\ e^{-x} \\ &= [\,(2\,x - 3) - 5\,(-2\,x + 1) + 6\,(2\,x + 1)\,]\ e^{-x} \text{ (factorisation).} \\ &= [\,2\,x - 3 + 10\,x - 5 + 12\,x + 6\,]\ e^{-x} = (24\,x - 2)\ e^{-x} \end{aligned}$$

On retrouve bien la partie droite de l'équation (E).
Donc, $f = (2\,x + 1)\ e^{-x}$ est bien solution particulière de (E).

c) Finalement, toutes les solutions de (E) sont de la forme :

$$y(x) = A\,e^{2x} + B\,e^{3x} + (2x + 1)\,e^{-x}$$

La **dernière question** concernant cet exercice pourrait être : « Déterminez la solution de (E) telle que : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ » (l'étape **d.**).

Pour y répondre, il faut dire : $y(0) = A\,e^0 + B\,e^0 + (0 + 1)\,e^0 = A + B + 1$.
Alors, la condition imposée sur $y(0)$ donne : $A + B + 1 = 0$.

De plus la dérivée de y est : $y'(x) = 2A\,e^{2x} + 3B\,e^{3x} + (-2x + 1)\,e^{-x}$
(en effet, on avait vu que la dérivée de $(2x + 1)\,e^{-x}$ était $(-2x + 1)\,e^{-x}$).
Alors, la condition $y'(0) = 0$ donne : $y'(0) = 2A\,e^0 + 3B\,e^0 + (0 + 1)\,e^0 = 0$.
Ainsi, on obtient une autre équation entre A et B : $2A + 3B + 1 = 0$.
Finalement on a le système : $\begin{cases} A + B = -1 & L1 \\ 2A + 3B = -1 & L2 \end{cases}$.

On fait $L2 - 2 \times L1$ dans l'idée de faire disparaître les A.
On obtient : $3B - 2B = -1 + 2 = 1$. Ainsi : $B = 1$.

En remplaçant B dans la ligne $L1$ par sa valeur, on trouve : $A = -B - 1 = -2$.

Finalement, la solution cherchée est : $y(x) = -2\,e^{2x} + e^{3x} + (2x + 1)\,e^{-x}$

- **Exercices** de base : XI et XII (voir la partie **III** je crois…).

Ensuite, faites les fiches spéciales (partie **IV**) regroupant une équation différentielle et une étude de fonction (mélange typique de l'examen de BTS…).

III. Exercices pour assimiler les « bases »

Pour calculer des dérivées et aussi résoudre des équations différentielles.
Vous trouverez la correction de tous les exercices dans la partie **V**.

I On considère la fonction $f(x) = e^{-2x}$. Calculez la dérivée $f'(x)$.
Donnez les valeurs à 10^{-3} près de : $f(0)$; $f(1)$; $f'(1)$.

II Soit (E) l'équation différentielle suivante : $y' + 5y = 0$.

a. Montrez que $f(x) = 0{,}7\,e^{-5x}$ est une solution de (E) en calculant $f' + 5f$.
b. Soit $g(x) = e^{-5x} + 1$. Calculez $g'(x) + 5\,g(x)$.
Peut-on dire que g est solution de (E) ?
c. Donnez la forme des solutions de (E).

III Soit (E) l'équation différentielle suivante : $2\,y' - 3\,y = 0$.

a. Donnez la forme des solutions de (E).
b. Déterminez la solution qui vérifie : $y(0) = 6$.

IV Soit (E) telle que : $y' + 2\,y = 10\,x - 1$.

a. Donnez la forme des solutions de l'équation $y' + 2\,y = 0$.
b. Montrez que $g(x) = 5\,x - 3$ est une solution particulière de (E).
c. Déterminez alors les solutions de (E).
d. Déterminez la solution particulière f de (E) qui vérifie : $f(0) = 4$.

V On considère l'équation (E) : $3\,y' - 9\,y = -18\,x - 3$.

a. Résoudre l'équation $3\,y' - 9\,y = 0$.
b. On cherche une solution particulière de (E) de la forme : $g(x) = a\,x + b$.
Déterminez a et b.
c. Donnez alors l'ensemble des solutions de (E).
d. Déterminez l'unique solution h vérifiant : $h(0) = 0$.

VI Résoudre l'équation vérifiée par la vitesse $\boldsymbol{v}$ d'un corps de masse $\boldsymbol{m} = 80$ kg en chute libre dans un champ de gravité tel que $\boldsymbol{g} = 10$. (E) $\boldsymbol{m\,v' + c_f\,v = m\,g}$.
$\boldsymbol{c_f}$, le coefficient de frottements, est ici égal à 20.

1. Résoudre l'équation : $m\,v' + c_f\,v = 0$ (avec $v = v(t)$ où t est le temps).
2. Déterminez une solution particulière sous la forme d'une constante.
3. Donnez la forme des solutions de (E).
4. Déterminez C tel que $v(0) = 0$ et tracez la courbe de la fonction $v(t)$.

Suite des exercices : les équations avec y'' en plus !

VII Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 6\,y = 0$.

a. Montrez que $f(x) = 2\,e^{2x}$ est une solution de (E).
b. Quelle est l'équation caractéristique associée à (E) ?
c. Déterminez alors la forme des solutions de (E).

VIII Résoudre : $3\,y'' + 6\,y' - 24\,y = 0$.

Puis déterminez l'unique solution f qui vérifie les conditions suivantes :
$f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

IX Soit l'équation (E) suivante : $y'' - 4y' - 5y = 0$.

a. Déterminez la forme des solutions de (E).
b. On cherche la solution particulière de (E) qui vérifie les deux conditions suivantes : $y(0) = 1$ et $y'(0) = -7$.

b1. Montrez que ces conditions conduisent à un système *du type* :
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + 5b = -7 \end{cases}$$
b2. Déterminez alors la solution cherchée.

X Déterminez les solutions de l'équation suivante : $y'' - 8y' + 16y = 0$.

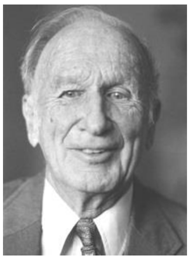
XI On pose l'équation (E) suivante : $y'' + 7y' + 12y = 12x^2 + 14x + 14$.

a. Résoudre l'équation : $y'' + 7y' + 12y = 0$.
b. Montrer que la fonction $f(x) = x^2 + 1$ est une solution particulière de (E).
c. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

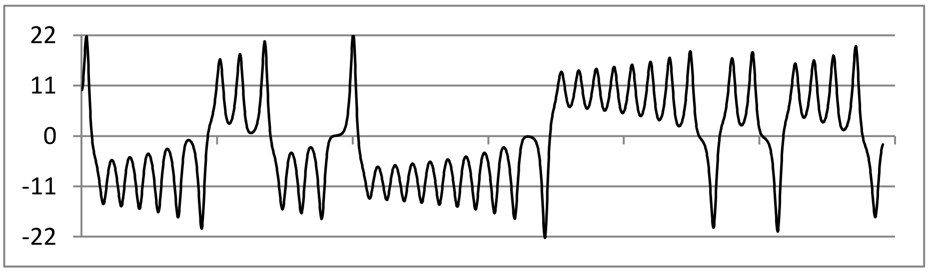
XII On pose l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 2y = -3e^{-x}$.

a. Résoudre sur R l'équation différentielle : $y'' - y' - 2y = 0$.
b. Soit h la fonction définie sur R par : $h(x) = (x + 2)e^{-x}$. Montrez que h est une solution particulière de (E).
c. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
d. Déterminez la solution particulière f de (E) vérifiant les conditions initiales suivantes : $f(0) = 2$ et $f'(0) = 2$.

Petite pause…



En 1963, le météorologue Edward Lorenz étudie des équations différentielles comme modèle simplifié de l'atmosphère : $x' = 10(y - x)$; $y' = 28x - y - xz$; $z' = xy - 8/3\,z$.
Elles représentent la préhistoire des prévisions météorologiques.
Il est impossible de résoudre ces équations avec un stylo… Lorenz a utilisé un ordinateur pour obtenir :



Cette courbe représente les variations de la variable x en fonction du temps. Elle montre des oscillations capricieuses : tantôt dans le haut, tantôt dans le bas du graphique. Bien malin qui pourrait dire à quel moment la courbe va revenir en haut ou en bas…

Ce phénomène étonnant d'oscillations aléatoires est de la même nature que celui observé par les météorologues lorsqu'ils essayent de prévoir le temps. Pour certaines périodes « instables », les calculateurs n'arrivent pas à prévoir un temps fiable. Ils donnent alors un indice de confiance assez bas.

IV. Fiches d'exercices « complets »

Attachez vos ceintures…

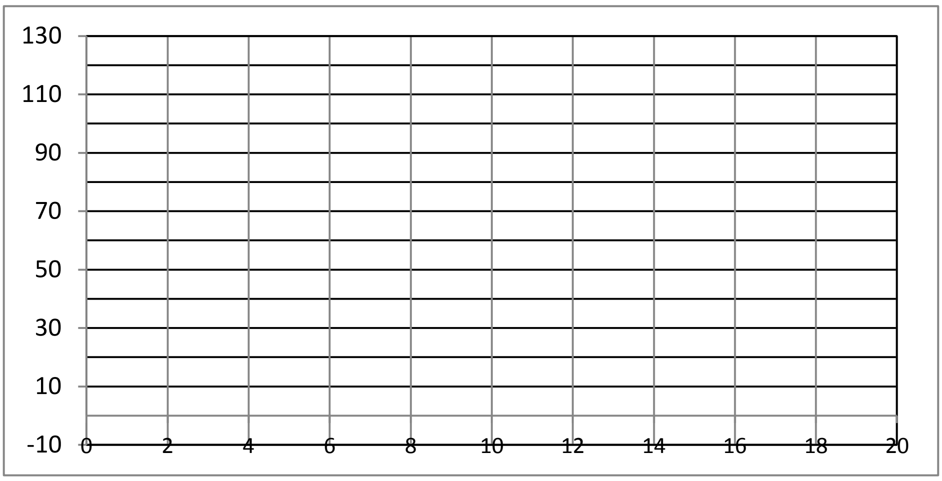
On étudie ici une trajectoire possible (pas forcément parfaitement *exacte*, mais *possible*…) pour le retour de la navette spatiale vers le Kennedy Space Center (Floride).
Voici quelques données techniques concernant ce joyau… La navette rentre sur Terre en planant. Elle se sert de la résistance de l'air pour freiner progressivement. La température des parois peut monter jusqu'à 1650 °C pendant la descente. Au moment où elle touche la piste, la vitesse de la navette est proche de 350 km/h !

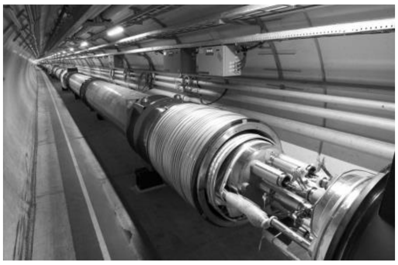
I Notons $y(x)$ la fonction qui donne l'altitude de la navette (en km) en fonction de la distance parcourue, notée x (en milliers de km). On suppose qu'une étude aérodynamique de la rentrée dans l'atmosphère permet d'obtenir l'équation différentielle vérifiée par y :
$y' + 0{,}5\, y = -1{,}5\, x + 22$ (E).

1. Résoudre l'équation $y' + 0{,}5\, y = 0$.
2. Déterminez les coefficients a et b pour que la fonction $g(x) = a\,x + b$ soit une solution particulière de (E). Déterminez toutes les solutions de (E).
3. Déterminez la solution de (E) qui vérifie : $y(0) = 130$.

II Soit : $f(x) = 80\, e^{-0{,}5\,x} - 3\,x + 50$. On suppose que f est la fonction du **I** et que la rentrée vers la Terre débute pour $x = 0$ à 130 km d'altitude.

1. Etudiez f (dérivée, sens de variation sur [0 ; 20], tableau de variations, courbe représentative). Info : sur le graphique, la courbure de la Terre a été négligée.
2. On cherche à trouver le point x_o de l'atterrissage. Pouvez-vous résoudre facilement l'équation $f(x_o) = 0$? Donnez x_o à 0,1 près d'après le graphique.
3. On admet ici : le terme $80\, e^{-0{,}5\,x}$ peut être éliminé (purement et simplement) lors la résolution de l'équation $f(x_o) = 0$. Déterminez alors x_o à 10^{-2} près. Calculez $f(x_o)$ à 10^{-3} près. A-t-on obtenu une bonne approximation de x_o?
4. Montrez que la droite $y = -3\,x + 50$ est une asymptote pour la courbe représentative de f. Tracez cette droite sur le graphique.





Plus rapide que la lumière ??

Pour étudier la structure de la matière, les physiciens provoquent des collisions entre particules de très grandes énergies. Au cours de ces chocs, les particules sont « disloquées » et les « débris » sont analysés…
Le LHC, est un anneau de 27 km de circonférence qui permet d'accélérer des protons jusqu'à 99,9999991 % de la vitesse de la lumière dans le vide ! Nous prendrons ici cette vitesse égale à 3×10^8 m/s pour simplifier. Le but de cet exercice est l'analyse de la montée de la vitesse d'un proton vers sa vitesse limite.

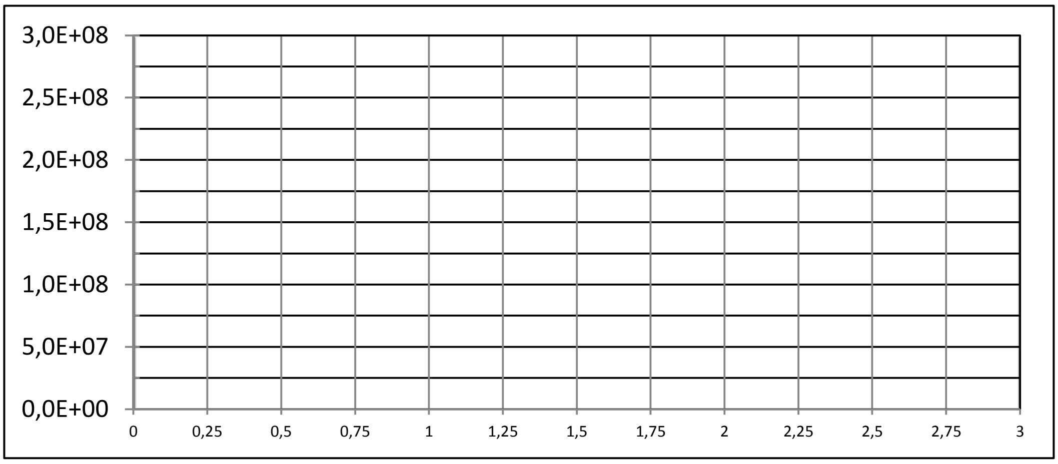
I On note $y(t)$ la vitesse (en m/s) d'un proton en fonction du temps t (en minutes). On suppose que la vitesse y est solution de l'équation différentielle (E) :
$y' + 1,85\, y = 5,55 \times 10^8$ (on suppose que cette équation a été obtenue grâce à une étude en mécanique quantique dont je vous passe les détails abominables…).

1. Résoudre l'équation : $y' + 1,85\, y = 0$.
2. Déterminez la constante K telle que la fonction $g(t) = K$ soit solution particulière de (E). Donnez alors toutes les solutions de (E).
3. Déterminez la fonction $f(t)$ solution de (E) telle que $f(0) = 0$.

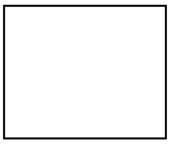
II Etude de la fonction : $f(t) = 3 \times 10^8 \left(1 - e^{-1,85\,t}\right)$

On *suppose* que f donne l'évolution de la vitesse d'un proton (en m/s) en fonction de t (*en minutes*).

1. Calculez la vitesse d'un proton après 6 secondes d'accélération. A quel pourcentage de la vitesse de la lumière correspond-elle ?
2. Calculez $f'(t)$. En déduire le tableau des variations de f sur [0 ; 10].
3. Tracez la courbe représentative de f pour t compris entre 0 et 3.
4. Déterminez la valeur de t pour laquelle la vitesse atteint 99,9999991 % de la vitesse de la lumière dans le vide.
5. Déterminez l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $t = 0$. Tracez cette tangente.



Allons au fond des choses…



L'univers serait né d'une gigantesque « explosion » appelée big bang, il y a environ quinze milliards d'années… Il y a très longtemps, alors que l'univers n'était âgé que d'un million d'années, l'univers était plongé dans le noir absolu (document authentique en haut à gauche). C'est alors que la lumière (les photons) fut libérée de la matière au moment où la température de l'univers tombait sous les 4 000 K (K pour Kelvin).

(le zéro absolu est 0 K = –273,15 °C).

Le document de droite (dont l'authenticité est en cours d'étude par l'université des sciences intergalactiques de Nogent-le-Rotrou) montre de façon éclatante que les photons étaient libres de voyager dans l'univers. Le ciel a gardé une trace de cet événement sous la forme d'un rayonnement fossile (la première lumière de l'univers). Cherchons ici une fonction modélisant la courbe de ce rayonnement…

I Recherche d'une fonction

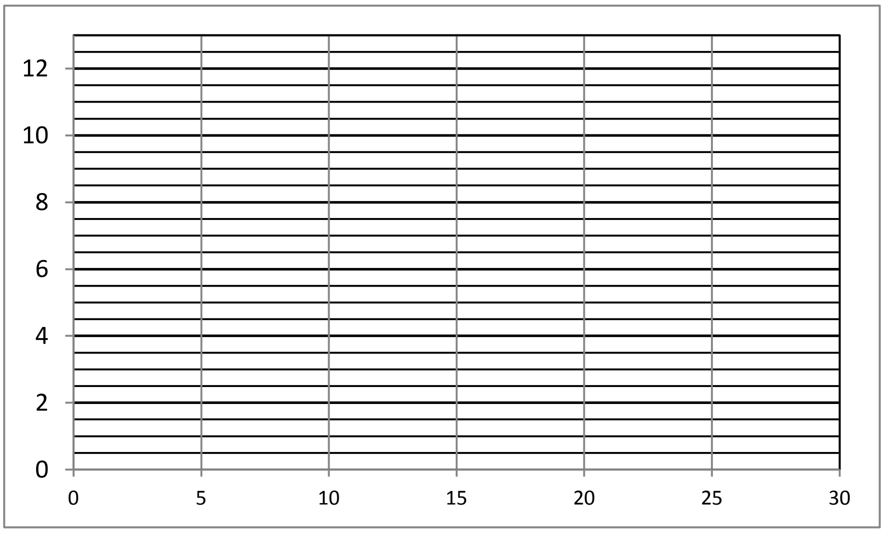
On suppose que l'équation (E) : $2\,y'' + 0{,}4\,y' + 0{,}02\,y = -0{,}2$ permet de trouver la *forme* de la fonction cherchée.

1. Déterminez les solutions de l'équation : $2\,y'' + 0{,}4\,y' + 0{,}02\,y = 0$.
2. Déterminez la solution particulière sous la forme d'une fonction constante. En déduire la forme des solutions de l'équation (E).
3. Déterminez la solution de (E) vérifiant : $g(0) = -10$ et $g'(0) = 6$.

II Etude d'une fonction pertinente : $h(x) = 6\,x\,\mathrm{e}^{-0{,}1\,x} - 10$

Calculez la dérivée de h puis déterminez ses variations. En déduire le tableau de ses variations sur l'intervalle [2 ; 28].

Tracez enfin le graphe de cette fonction.



Vous avez sous vos yeux la forme du *spectre d'émission* du fond du ciel (lié au rayonnement fossile).

Info : cette courbe donne la quantité d'énergie émise par un corps en fonction de la longueur d'onde du rayonnement. C'est une courbe typique liée à la théorie du « corps noir » de Planck.

La température mesurée (par les astronomes) est égale à 3 K, loin des 4 000 K de l'introduction… La différence vient du « décalage vers le rouge » causée par l'expansion de l'univers.

V. Correction des exercices

I $f'(x) = -2\,e^{-2x}$ Avec la calculette : $f(0) = e^{-2\times 0} = e^0 = 1$.
$f(1) = e^{-2\times 1} = e^{-2} \approx 0{,}135$. Et enfin : $f'(1) = -2\,e^{-2\times 1} = -2\,e^{-2} \approx -0{,}271$.

II a. $f(x) = 0{,}7\,e^{-5x}$ a pour dérivée : $f'(x) = 0{,}7 \times (-5\,e^{-5x}) = -3{,}5\,e^{-5x}$.
Alors, on calcule $f' + 5f$ et on obtient : $f' + 5f = -3{,}5\,e^{-5x} + 5 \times 0{,}7\,e^{-5x}$.
Comme le résultat donne 0, on en conclut que f est bien solution de l'équation.
b. On obtient : $g'(x) = -5\,e^{-5x}$. Alors : $g' + 5\,g = -5\,e^{-5x} + 5\,(e^{-5x} + 1) = -5\,e^{-5x} + 5\,e^{-5x} + 5 = 5$.
Le résultat du calcul ne donne pas 0, donc g n'est pas solution de l'équation.
c. D'après le cours : $y(x) = C\,e^{-5x}$.

III a. $2\,y' - 3\,y = 0$ peut s'écrire (en divisant tout par 2) : $y' - 3/2\,y = 0$.
Soit : $y' - 1{,}5\,y = 0$. Là, on utilise le théorème du cours : $y(x) = C\,e^{1{,}5x}$.
b. On a : $y(x) = C \times e^{1{,}5\times 0} = C\,e^0 = C$. D'où : $C = 4$ Finalement, la solution est : $y(x) = 4\,e^{1{,}5x}$.

IV a. D'après le cours, on a : $y(x) = C\,e^{-2x}$ (pas besoin de justification ici).
b. On doit calculer $g' + 2\,g$. Avec $g = 5\,x - 3$ on a : $g' = 5$.
Ainsi : $g' + 2\,g = 5 + 2(5\,x - 3) = 5 + 10\,x - 6 = 10\,x - 1$.
On retrouve bien le second membre de (E), donc g est bien solution particulière.
c. On écrit la somme de la solution du a) et de la solution particulière. Donc : $y(x) = C\,e^{-2x} + 5\,x - 3$.
d. On pose $f(x) = C\,e^{-2x} + 5\,x - 3$ et on veut $f(0) = 4$ Or : $f(0) = C\,e^{-2\times 0} - 3 = C - 3$
Donc : $f(0) = C - 3$. On a donc la condition : $C - 3 = 4$. Ce qui donne : $C = 7$.
Finalement : $f(x) = 7\,e^{-2x} + 5\,x - 3$

V a. $3\,y' - 9\,y = 0$ devient : $y' - 3\,y = 0$ (après division par 3). Donc la solution est : $y(x) = C\,e^{3x}$.
b. On a : $g'(x) = a$ Donc : $3\,g' - 9\,g = 3\,a - 9(a\,x + b) = -9\,a\,x + 3\,a - 9\,b$.
Pour satisfaire (E), il faut vérifier : $3\,g' - 9\,g = -18\,x - 3$
D'où : $-9\,a\,x + 3\,a - 9\,b = -18\,x - 3$ ce qui donne : $\begin{cases} -9\,a = -18 & (i) \\ 3\,a - 9\,b = -3 & (ii) \end{cases}$.
La relation *(i)* correspond au lien entre les « x » et la relation *(ii)* aux termes constants.
On résout *(i)* et on obtient : $a = 2$. Puis avec *(ii)*, on trouve : $-9b = -3 - 3\,a = -3 - 6$ d'où : $-9\,b = -9$ et $b = 1$
Finalement : $g(x) = 2\,x + 1$ est la solution particulière.
c. Les solutions de (E) sont donc : $y(x) = C\,e^{3x} + 2\,x + 1$.
d. Soit : $h(x) = C\,e^{3x} + 2\,x + 1$ et on veut : $h(0) = C\,e^{3\times 0} + 2 \times 0 + 1 = 0$.
D'où : $C\,e^0 + 1 = 0$, soit : $C = -1$. Alors : $h(x) = -\,e^{3x} + 2\,x + 1$.

VI 1. On a : $80\,v' + 20\,v = 0$ qui est aussi : $v' + 1/4\,v = 0$ (après ÷ par 80).
L'équation $v' + 1/4\,v = 0$ a pour solution : $v(t) = C\,e^{-0{,}25\,t}$.
2. Avec $v(t) = k$, on a : $v'(t) = 0$. Donc : $20\,k = 80 \times 10 = 800$. Soit $k = \dfrac{800}{20} = 40$. $v(t) = 40$ est solution particulière.
3. Donc, on a : $v(t) = C\,e^{-0{,}25\,t} + 40$.
Remarque : le « 40 » représente la vitesse limite de chute car le terme $e^{-0{,}25\,t}$ tend vers 0 lorsque le temps t tend vers l'infini ; de plus 40 m/s = 144 km/h).
4. Il faut : $v(0) = C\,e^{-0{,}25\times 0} + 40 = 0$ D'où la relation : $C + 40 = 0$ Soit : $C = -40$.

VII a. Si $f(x) = 2\,e^{2x}$ on a : $f' = 4\,e^{2x}$ puis : $f'' = 4 \times 2\,e^{2x} = 8\,e^{2x}$.
Alors on calcule : $f'' + f' - 6f = 8\,e^{2x} + 4\,e^{2x} - 6\,(2\,e^{2x}) = 12\,e^{2x} - 12\,e^{2x} = 0$. f est bien solution de (E).
b. L'équation caractéristique est : $r^2 + r - 6 = 0$.
c. $\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$. D'où : $r_1 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$ et $r_2 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ Ainsi : $y(x) = A\,e^{-3x} + B\,e^{2x}$.

VIII On pose : $a = 3$; $b = 6$; $c = -24$ et l'équation caractéristique : $3\,r^2 + 6\,r - 24 = 0$. $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-24)$.
Donc : $\Delta = 324 = 18^2$ On a alors : $r_1 = \dfrac{-6-18}{2\times 3} = -4$ et $r_1 = \dfrac{-6+18}{2\times 3} = 2$.
Ce qui donne : $y(x) = A\,e^{-4x} + B\,e^{2x}$. On pose : $f(x) = A\,e^{-4x} + B\,e^{2x}$ et on veut imposer : $f(0) = 1$.

Or, en remplaçant x par 0, on a : $f(0) = A\,e^0 + B\,e^0 = A + B$. D'où : $A + B = 1$.
De plus, on a la condition $f'(0) = 0$. La dérivée de f est : $f' = -4\,A\,e^{-4x} + 2\,B\,e^{2x}$.
D'où, en remplaçant x par 0 : $f'(0) = -4\,A\,e^0 + 2\,B\,e^0 = -4\,A + 2\,B$. La condition sur f' est donc : $-4\,A + 2\,B = 0$.

Il faut résoudre le système : $\begin{cases} A+B=1 & (i) \\ -4\,A+2\,B=0 & (ii) \end{cases}$. Faisons : $4 \times (i) + (ii)$ pour faire partir les A.

Il vient : $4\,B + 2\,B = 4 \times 1$. Ainsi : $6\,B = 4$ ce qui donne : $B = 2/3$ Puis (i) s'écrit : $A + 2/3 = 1$.
Ce qui donne : $A = 1 - 2/3 = 1/3$ et finalement : $f(x) = 1/3\,e^{-4x} + 2/3\,e^{2x}$.

IX a. On pose : $r^2 - 4\,r - 5 = 0$ puis : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36 = 6^2$.
On obtient : $r_1 = \dfrac{4-6}{2} = -1$; $r_2 = \dfrac{4+6}{2} = 5$ D'où : $y(x) = A\,e^{-x} + B\,e^{5x}$.
b. b1. On veut : $y(0) = 1$ d'où : $A\,e^0 + B\,e^0 = 1$ soit : $A + B = 1$.
On veut aussi : $y'(0) = -7$ Or : $y'(x) = -A\,e^{-x} + 5\,B\,e^{5x}$.
Ainsi : $-A\,e^0 + 5\,B\,e^0 = -7$ soit : $-A + 5\,B = -7$. On obtient le système : $\begin{cases} A+B=1 & (i) \\ -A+5\,B=-7 & (ii) \end{cases}$ espéré…
b2. L'addition des deux lignes donne : $6\,B = -6$ d'où : $B = -1$.
Alors : $A = 1 - B = 2$. Finalement : $y(x) = 2\,e^{-x} - e^{5x}$.

X On pose : $r^2 - 8\,r + 16 = 0$ On a : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 0$. Racine « double » : $r = \dfrac{-(-8)}{2} = 4$.
D'après la seconde ligne du formulaire : $y(x) = (A\,x + B)\,e^{4x}$.

XI a. L'équation caractéristique est : $r^2 + 7\,r + 12 = 0$.
Puis : $\Delta = 49 - 48 = 1$ ce qui donne : $r_1 = -4$ puis $r_2 = -3$. Soit : $y(x) = A\,e^{-4x} + B\,e^{-3x}$.
b. On a : $f(x) = x^2 + 1$ donc : $f'(x) = 2\,x$ puis $f''(x) = 2$.
On calcule : $f'' + 7\,f' + 12\,f = 2 + 7\,(2\,x) + 12\,(x^2 + 1) = 12\,x^2 + 14\,x + 14$.
L'équation (E) est bien vérifiée. Donc, $f = x^2 + 1$ est bien solution particulière.
c. L'ensemble des solutions est donc : $y(x) = A\,e^{-4x} + B\,e^{-3x} + x^2 + 1$.

XII a. On pose : $r^2 - r - 2 = 0$. Donc : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2$.
Alors : $r_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$; $r_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$. D'où : $y(x) = A\,e^{-x} + B\,e^{2x}$.
b. Soit $h = (x + 2)\,e^{-x}$ (sous la forme $u\,v$) qu'il faut dériver deux fois à la suite.
On pose : $u = x + 2$ et $v = e^{-x}$ D'où : $u' = 1$ et $v' = -e^{-x}$.
Alors : $h' = u'\,v + u\,v' = (1)\,e^{-x} + (x + 2)\,(-e^{-x}) = (-x - 1)\,e^{-x}$.
De même, pour calculer h'' on dit que h' est de la forme $u\,v$ avec : $u = -x - 1$ et $v = e^{-x}$
On a donc : $u' = -1$ et $v' = -e^{-x}$. Alors : $h'' = (h')' = -e^{-x} + (-x - 1)\,(-e^{-x}) = x\,e^{-x}$.
Et, on calcule : $h'' - h' - 2\,h = x\,e^{-x} - (-x - 1)\,e^{-x} - 2\,(x + 2)\,e^{-x}$.
Soit : $h'' - h' - 2\,h = [\,x + x + 1 - 2\,x - 4\,]\,e^{-x} = -3\,e^{-x}$.
Donc, h est bien solution particulière.
c. Alors, l'ensemble des solutions est : $y(x) = A\,e^{-x} + B\,e^{2x} + (x + 2)\,e^{-x}$.
d. On pose : $f(x) = A\,e^{-x} + B\,e^{2x} + (x + 2)\,e^{-x}$ D'où : $f(0) = A + B + 2\,e^0 = A + B + 2$.
De plus : $f'(x) = -A\,e^{-x} + 2\,B\,e^{2x} + (-x - 1)\,e^{-x}$ D'où : $f'(0) = -A + 2\,B - 1$
Les conditions imposées donnent le système : $\begin{cases} A+B+2=2 & (i) \\ -A+2\,B-1=2 & (ii) \end{cases}$. Soit : $\begin{cases} A+B=0 & (i) \\ -A+2\,B=3 & (ii) \end{cases}$.
Et $(i) + (ii)$ donne : $3\,B = 3$ Soit $B = 1$
Et enfin : $A = -1$. Finalement : $f(x) = -e^{-x} + e^{2x} + (x + 2)\,e^{-x} = e^{2x} + (x + 1)\,e^{-x}$

Attachez vos ceintures…

I 1. $y' + 0{,}5\,y = 0$ a pour solution : $y(x) = C\,e^{-0{,}5\,x}$.
2. Si on prend : $g = a\,x + b$ alors, sa dérivée est : $g' = a$.
On peut donc calculer : $g' + 0{,}5\,g = a + 0{,}5\,(a\,x + b) = 0{,}5\,a\,x + a + 0{,}5\,b$.
Pour que g soit solution de (E), il faudrait avoir : $g' + 0{,}5\,g = -1{,}5\,x + 22$.
Ainsi, on obtient la relation : $0{,}5\,a\,x + a + 0{,}5\,b = -1{,}5\,x + 22$.

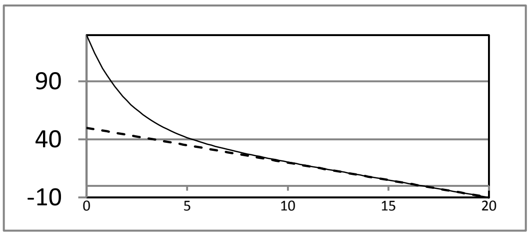
Il faut autant de x de chaque côté et autant de termes constants. Cela conduit au système : $\begin{cases} 0,5\,a = -1,5 & (i) \\ a + 0,5\,b = 22 & (ii) \end{cases}$.

(i) donne : $a = -3$ puis *(ii)* donne : $0,5\ b = 25$. Finalement : $b = 50$. Donc, la solution est : $g(x) = -3\ x + 50$.
Et toutes les solutions de (E) sont de la forme : $y(x) = C\ e^{-0,5\,x} - 3\ x + 50$.
3. On veut : $y(0) = 130$. Or : $y(0) = C\ e^0 + 50 = 5 + 50$.
Il faut donc : $C + 50 = 130$. Soit : $C = 80$. Ainsi : $y(x) = 80\ e^{-0,5\,x} - 3\ x + 50$.

II 1. La dérivée de f est : $f\,'(x) = 80\ (-0,5\ e^{-0,5\,x}) - 3 = -40\ e^{-0,5\,x} - 3$. La dérivée s'annule-t-elle ?
Soit : $f\,'(x) = 0$ Soit : $-40\ e^{-0,5\,x} - 3 = 0$. Cela donne : $-40\ e^{-0,5\,x} = 3$ ou encore : $e^{-0,5\,x} = -3/40$.
Or, une exponentielle est toujours > 0. Cette équation n'a donc pas de solution.
Ainsi, la dérivée ne s'annule jamais et garde un signe constant. Pour le déterminer, calculons $f\,'(0)$: $f\,'(0) = -40\ e^0 - 3 = -43$.
La dérivée est négative et on peut donner le tableau des variations ci-contre :
Avec à part : $f(0) = 130$ et $f(20) \approx -10$.

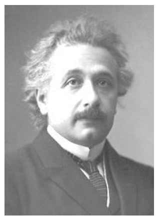
x	0	20
$f\,'$	$-$	
f	130 ↘	-10

On obtient finalement la courbe à droite.
Info : j'ai aussi tracé la droite $y = -3\ x + 50$ en pointillés (elle sera utile par la suite…).



2. D'après ce graphe, la courbe semble couper l'axe des abscisses au point $x_o \approx 17$ (en gros…).
En revanche, la résolution de l'équation $f = 0$ s'annonce très difficile car l'inconnue x_o est à la fois dans l'exponentielle et aussi en dehors… Pas facile !
3. Pour info : vu que x_o est proche de 17 (d'après le graphe), le terme $80\ e^{-0,5 \times 17}$ étant très petit ($\approx 0,016$), il n'influencera pas trop l'équation. On peut donc ici le négliger pour notre cas.
On pose donc : $-3\ x + 50 = 0$. Soit : $x = 50/3 \approx 16,67$.
Enfin, le calcul donne : $f(16,67) \approx 0,009$ ce qui est bien proche du zéro voulu.
Pour conclure, $x_o = 16,67$ est une bonne approximation de l'abscisse du point d'atterrissage de la navette.
4. Pour montrer que la droite d'équation $y = -3\ x + 50$ est asymptote de la courbe représentative de f, il faut poser : $f(x) - (-3\ x + 50)$ puis montrer que sa limite est nulle à l'infini. On a : $f(x) - (-3\ x + 50) = 80\ e^{-0,5\,x}$.
On peut calculer le terme $80\ e^{-0,5\,x}$ pour un x « grand » pour voir sa limite. Par exemple avec $x = 1000$, on trouve : $80\ e^{-0,5 \times 1000} = 0$ (à la calculette). C'est ce qu'il fallait démontrer… Attention, il faut taper : $80\ e^{(-0,5 \times 1000)}$.
La courbe se rapproche de la droite en pointillés (son asymptote).

Plus rapide que la lumière ?



Info : d'après la théorie de la relativité, rien ne va plus vite que la lumière.

I 1. $y' + 1,85\ y = 0$ a pour solution : $y(t) = C\ e^{-1,85\,t}$.

2. Si on utilise : $g(t) = K$, alors : $g'(t) = 0$ et on peut remplacer dans (E) pour obtenir la relation :

$0 + 1,85\ K = 5,55\times10^8$. Ce qui donne : $K = \dfrac{5,55\times10^8}{1,85} = 3\times10^8$.

La solution particulière constante est : $g(t) = 3\times10^8$. Les solutions sont donc de la forme : $y(t) = C\ e^{-1,85\,t} + 3\times10^8$.

3. Si on pose $f(t) = C\ e^{-1,85\,t} + 3\times10^8$, le calcul de $f(0)$ donne : $f(0) = C + 3\times10^8$.
Alors, la condition $f(0) = 0$ impose : $C + 3\times10^8 = 0$. Ce qui donne : $C = -3\times10^8$.
Finalement, la solution cherchée est : $f(t) = -3\times10^8\ e^{-1,85\,t} + 3\times10^8$.

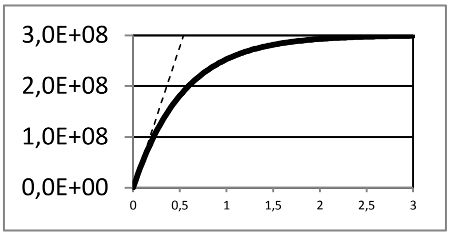
II 1. On convertit d'abord 6 secondes en minute ! 6 s = 0,1 minute. Et on calcule : $f(0,1) = 3\times10^8\ (1 - e^{-1,85 \times 0,1})$
$\approx 50\,668\,715$ m/s. Ce qui représente : $\dfrac{50\,668\,715}{300\,000\,000} \times 100 = 16,9\ \%$ de la vitesse de la lumière.

2. Dérivons f : $f\,' = 3\times10^8\ u'$ où $u = 1 - e^{-1,85\,t}$ donc $u' = 0 - (-1,85\ e^{-1,85\,t})$.
Finalement : $f\,' = 3\times10^8 \times 1,85\ e^{-1,85\,t} = 5,55\times10^8\ e^{-1,85\,t}$.

$f\,'$ s'écrit donc comme le produit de termes *positifs* ! Le « $5,55\times10^8$ » et le « $e^{-1,85\,t}$ » (car : $e^x > 0$).
Moralité : la dérivée $f\,'$ est une fonction positive et f est une fonction croissante de $f(0) = 0$ vers $f(10)$. Avec $f(10) = A$ qui vaut 299 999 997,2 m/s.

t	0	10
$f\,'$	+	
f	0 ↗	A

3. La courbe obtenue doit être du genre :



4. Posons $\alpha = \dfrac{99,9999991}{100}$. Alors, l'équation est : $f(t) = 3\times10^8\ \alpha$.
Soit : $3\times10^8\ (1 - e^{-1,85\,t}) = 3\times10^8\ \alpha$. Alors, après division par 3×10^8, on a :
$1 - e^{-1,85\,t} = \alpha$. Soit : $e^{-1,85\,t} = 1 - \alpha$.

On fait « ln » de chaque côté : $-1,85\ t = \ln(1 - \alpha)$. Soit : $t = \dfrac{\ln(1-\alpha)}{-1,85}$. On obtient : $t \approx 10,01$.

5. Par définition, la tangente à la courbe de f tracée au point d'abscisse t_o a pour équation : $y = f\,'(t_o)\ (t - t_o) + f\,(t_o)$.
Alors, on détermine avec $t_o = 0$: $f\,'(t_o) = f\,'(0) = 5,55\times10^8\ e^{-1,85\times 0} = 5,55\times10^8$. Puis : $f\,(t_o) = 0$ (voir ci-dessus).
Finalement la tangente est : $y = 5,55\times10^8\ t$ (droite passant à l'origine du repère en pointillés).

Allons au fond des choses…

I 1. On pose : $2\,r^2 + 0,4\,r + 0,02 = 0$ Donc : $\Delta = (0,4)^2 - 4 \times 2 \times 0,02 = 0$. Racine double : $r = \dfrac{-0,4}{2\times 2} = -0,1$.

La solution de l'équation est donc : $y(x) = (A\,x + B)\ \mathrm{e}^{-0,1\,x}$.

2. Soit une solution particulière constante de la forme : $y_p(x) = k$. Ses dérivées sont : $y'_p = 0$ et $y''_p = 0$.
Puis, en remplaçant dans (E) on obtient : $0,02\ k = -0,2$. Ainsi : $k = -10$. Et $y_p(x) = -10$ est solution particulière.
Alors, la forme des solutions de (E) est : $y(x) = (A\,x + B)\ \mathrm{e}^{-0,1\,x} - 10$.

3. Pour avoir $g(x) = (A\,x + B)\ \mathrm{e}^{-0,1\,x} - 10$ telle que $g(0) = -10$, il faut écrire : $g(0) = B\ \mathrm{e}^0 - 10 = -10$
(ou encore : $B - 10 = -10$). Ceci donne facilement : $B = 0$. Ainsi g se simplifie en : $g(x) = A\,x\ \mathrm{e}^{-0,1\,x} - 10$.

Il reste la condition imposée : $g'(0) = 6$. Or : g est de la forme $u\,v + K$ avec : $u = A\,x$ $v = e^{-0,1\,x}$ et $K = -10$.
La dérivée est : $g' = u'\,v + u\,v' + 0$ D'où : $g' = A\,e^{-0,1\,x} + A\,x\,(-0,1\ \mathrm{e}^{-0,1\,x})$
(où $u' = A$; $v' = -0,1\ \mathrm{e}^{-0,1\,x}$; et le « 0 » est la dérivée de la constante K)
Donc : $g'(0) = A$. Et la condition impose directement $A = 6$. Finalement : $g(x) = 6\,x\ \mathrm{e}^{-0,1\,x} - 10$.

II Pour ceux qui auraient un doute, h est la fonction notée g ci-dessus…
La dérivée de h est (paragraphe ci-dessus en prenant $A = 6$) : $h' = 6\ \mathrm{e}^{-0,1\,x} + 6\,x\,(-0,1\ \mathrm{e}^{-0,1\,x}) = (-0,6\,x + 6)\ \mathrm{e}^{-0,1\,x}$.

Pour étudier h, il faut déterminer son sens de variation et donc, le signe de sa dérivée. Pour cela, on résout $h'(x) = 0$
Soit : $(-0,6\,x + 6)\ \mathrm{e}^{-0,1\,x} = 0$. Rappel : l'équation $A\,B = 0$ est vérifiée si $A = 0$ ou bien si $B = 0$.
Or, l'exponentielle n'est jamais nulle ! ($\mathrm{e}^{-0,1\,x} \neq 0$). Donc, il faut résoudre : $(-0,6\,x + 6) = 0$. Donc : $-0,6\,x = -6$.
Soit : $x = \dfrac{-6}{-0,6} = 10$. Donc : La dérivée h' s'annule *uniquement* pour $x = 10$. Soit : $h'(10) = 0$.

Il reste à déterminer le signe de h' pour x plus petit que 10 puis plus grand que 10.

Pour x plus petit que 10, on prend par exemple $x = 0$. On calcule ensuite : $h'(0) = 6\ \mathrm{e}^0 = 6 > 0$.
Ce résultat positif montre que h' est positive sur l'intervalle [0 ; 10].

Pour x plus grand que 10, on prend par exemple $x = 30$.
On calcule ensuite : $h'(30) = (-0,6 \times 30 + 6)\ \mathrm{e}^{-0,1\times 30} = -12\ \mathrm{e}^{-3} \approx -0,6 < 0$.
Ce résultat négatif montre que h' est négative sur l'intervalle [10 ; 30].

Moralité : pour $x < 10$ on a $h' > 0$ tandis que pour $x > 10$ on a $h' < 0$.

On peut alors faire le tableau des variations… D'où le tableau des variations de x sur l'intervalle demandé : [2 ; 28].
Et des calculs donnent :
$h(2) \approx -0,2$; $h(10) \approx 12,1$; $h(28) \approx 0,2$.

x	2		10		28
h'		+	0	−	
h	−0,2	↗	12,1	↘	0,2

Avec tout cela, vous deviez avoir sous les yeux le graphe ci-contre :