Equation de la chaleur

En 1811, Joseph Fourier travaille sur la conduction de la chaleur dans les solides. Il propose une équation désormais célèbre que l'on va résoudre ici de manière théorique. On note $u(x, t)$, la température en fonction de x (variable d'espace) et de t (variable de temps, $t \geq 0$) dans un fil.

Fourier montre que $u(x, t)$ est solution de l'équation (E) : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et avec $u(x,0) = f(x)$

Notez bien que pour ce travail :

a) sous certains conditions remplies ici, on peut faire entrer ou bien sortir la dérivée $\dfrac{\partial}{\partial y}$ d'une intégrale du genre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g(y,z)}{\partial y}\, dz$. D'où : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g(y,z)}{\partial y}\, dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y,z)\, dz$

b) la transformée de Fourier d'une fonction $g(y, z)$ sur la variable y sera ici (pour alléger les calculs) notée selon : $\mathbf{G}(s, z) = \mathfrak{F}\,(\, g(y, z)\,) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(y,z)\, e^{-i s y}\, dy$

1) Transformez $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ en prenant sa transformée de Fourier sur la variable x. Vous noterez $\mathrm{U}(s, t)$ la transformée de Fourier de $u(x,t)$.
2) On admet le résultat : $\mathfrak{F}\,(\, f\,') = \mathrm{i}\, s\, \mathfrak{F}\,(\, f\,)$. Transformez alors $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en prenant également sa transformée de Fourier par rapport à la variable x.
3) L'équation (E) est donc devenue (F), une équation vérifiée par $\mathrm{U}(s, t)$. Résolvez cette équation en considérant ici s comme une constante.

Si tout va bien, vous avez sous les yeux : $\mathrm{U}(s, t) = \mathfrak{F}\,(\, f\,)\, e^{-s^2 t}$ où $\mathfrak{F}\,(\, f\,)$ est la transformée de Fourier de la fonction f indiquée au départ (qui représente la condition initiale pour le profil de température). La relation donnant U fait penser à un produit de convolution (*of course !*) sur la variable x.

Alors : $\mathrm{U}(s, t) = \mathfrak{F}\,(\, f\,)\, \mathfrak{F}\,(h)$ avec $\mathfrak{F}\,(h) = e^{-s^2 t}$. Il faut trouver la fonction h en prenant la transformée de Fourier inverse selon : $h(x, t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 t}\, e^{i s x}\, ds$

4) Montrez que : $\dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x} = -\dfrac{x}{2t}\, h(x,t)$. Résoudre ensuite : $g' + \dfrac{x}{\alpha}\, g = 0$ où $g = g(x)$.

   Et en déduire : $h(x, t) = e^{-\frac{x^2}{4t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 t}\, ds$
5) Je vous donne : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds = \sqrt{\pi}$ (résultat de Laplace). Avec un changement de variable adapté, montrez : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 t}\, ds = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$
6) En déduire la solution de notre problème : $u(x, t) = f * \left(\sqrt{\dfrac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \right)$

(convolution par rapport à la variable x)