Une enquête délicate…

On s'intéresse ici à une inégalité apparemment simple :

$$\mathbf{2^n > n^2}$$

Remarquons la jolie interversion du 2 et du *n* !

Est-elle parfois vraie, parfois fausse, toujours vraie, toujours fausse ? Nous allons mener notre enquête…
Dans ce qui suit, *n* est bien entendu un entier naturel pouvant potentiellement aller de 0 jusqu'à l'infini !

* Quelques valeurs des deux formules pourraient être intéressantes !

Voici :

n	**0**	**1**	2	3	4	**5**	**6**	**7**
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49

Conclusion : Si l'on appelle P_n la propriété « $2^n > n^2$ », on constate qu'elle est Vraie pour les *n* marqués en gras dans le tableau mais pour les autres valeurs de *n*, elle est Fausse.

Pour les valeurs suivantes de *n*, on pourrait conjecturer que la propriété reste vraie sur la lancée des cas 5, 6 et 7, mais rien n'est moins sûr ! Nous devons étudier ce problème plus rigoureusement car faire un tableau du même genre avec *n* de 0 jusqu'à l'infini prendrait beaucoup trop de papier (ce qui conduirait à une accélération de la déforestation…..).

* Principe de récurrence…

Si l'on peut montrer que la propriété est héréditaire à partir du rang 5, comme elle est vraie à ce rang, on pourra déclarer la propriété vraie pour tout *n* à partir de 5.

Etude de l'hérédité

Supposons que pour un certain entier *n*, P_n soit vraie. Donc : $2^n > n^2$ est Vrai.
On voudrait montrer que P_{n+1} reste vraie. Donc, que : $2^{n+1} > (n+1)^2$ soit encore Vrai.

On part de $2^n > n^2$ que l'on multiplie par 2. D'où : $2^{n+1} > 2\,n^2$

Pour aboutir à notre conclusion espérée $2^{n+1} > (n+1)^2$, il nous suffit de prouver l'inégalité suivante : $2\,n^2 \geq (n+1)^2$ (*)

En effet, on aurait ainsi : $2^{n+1} > 2\,n^2 \geq (n+1)^2$. Soit au final : $2^{n+1} > (n+1)^2$.

Méthode de travail pour effectuer cette preuve : On pose A= $2\,n^2-(n+1)^2$.
Dès que A est positif, notre relation (*) est vérifiée.
On obtient après développement : A = $n^2 - 2\,n - 1$
Cette expression est un trinôme du second degré dont les racines (je vous laisse faire le calcul du discriminant…) sont : $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.
A est positif en dehors de ses racines car le coefficient de n^2 vaut 1 (positif).
Pour notre problème, on peut donc dire que A est positif pour tout entier à partir de $1+\sqrt{2}$ (environ égal à 2,4). Ainsi, A est positif à partir de $n = 3$.

Conclusion : La propriété est héréditaire à partir du rang $n = 3$. Mais cette hérédité n'est intéressante qu'à partir du rang 5 ! (le 5 marque ici une surprise… ne pas lire factorielle de 5, ce qui nous ferait beaucoup plus car 5 ! = 120).

On constate finalement que la propriété $2^n > n^2$ est héréditaire à partir du rang 3, alors qu'elle est fausse pour ce rang. Joli exemple montrant toute l'importance de la rigueur qu'il faut apporter à la rédaction d'une récurrence….
Bref, l'inégalité peut être déclarée Vraie pour tout n à partir de 5 grâce au principe de récurrence. Ceci est un très beau résultat ne tenant que sur cette seule feuille !

L'histoire du principe de récurrence s'étale sur de nombreux siècles !
L'idée a été utilisée par Euclide vers l'an 300 avant J.C. même si certains pensent que c'est plutôt une première approche sans rigueur.

La rigueur arrive avec Pascal, Fermat, Bernoulli, Dedekind et Peano.

Pascal

Fermat

Bernoulli

Dedekind

Peano