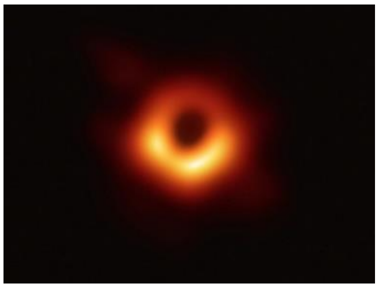
Notion de différentielle…

« J'me souviens plus de la formule !! »



En plein devoir, crucial pour votre avenir, vous avez ***le*** trou de mémoire du siècle… On dit aussi : « J'ai un trou noir » ! (ci-dessus : observation du trou noir de M87 révélé en avril 2019).
La question du devoir était : « Calculer la différentielle de f définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ » ! !

Voici de quoi vous aidez un peu… pour sortir du néant !

Une petite introduction littéraire d'abord…

Certaines fonctions tentent de décrire un phénomène physique ou mathématique. Parfois (même souvent !), elles sont très compliquées car le problème en lui-même l'est aussi (compliqué !). Ainsi, les mathématiciens et les physiciens essayent de simplifier le problème en simplifiant la fonction à étudier. Mais attention, la ruse est de simplifier la fonction juste autour d'une zone à étudier. Les scientifiques parlent de la « linéarisation » du problème. C'est une première approche qui peut apporter des informations très intéressantes sur la nature du problème étudié.

On doit à Gottfried Leibniz (1646-1716) l'une des premières approches de ce problème, il est l'auteur d'une théorie du calcul différentiel.

Un exemple simpliste pour discuter…

La hauteur d'un solide en fonction du temps t est donnée par $f(t) = t^2$ (formule valable sur une certaine durée liée au problème…). Vous savez que l'on peut remplacer cette relation autour de $t = 1$ (par exemple) par l'équation de sa tangente en ce point. Ainsi, pour t proche de 1, on peut utiliser l'expression $g(t) = 2t - 1$ à la place de $f(t)$.
Etudions l'écart $g(1+\Delta\tau) - g(1)$ qui nous renseigne sur l'évolution de g juste après $t = 1$.
On a : $g(1+\Delta\tau) - g(1) = [\,2(1+\Delta\tau) - 1\,] - [\,1\,] = 2\,\Delta\tau$

Cette formule étant « linéaire », elle est plus simple d'utilisation. Attention, sa validité n'est valable que pour t proche de 1. Au fait, que veut dire formule « linéaire » ?
Un écart temporel égal à $\Delta\tau$ par rapport à $t = 1$ entraîne un écart de g qui est *proportionnel* à $\Delta\tau$.
Une cause entrainant un effet linéaire à celle-ci, l'étude du problème sera simplifiée. Voici dévoilée l'importance de l'idée de la notion de différentielle d'une fonction : transformer une fonction de telle sorte que l'on puisse réduire ses variations à des aspects « linéaires ».
On modifie bien sûr la réalité, mais au moins, on peut l'étudier !!!

Pour finir : la fonction qui à $\Delta\tau$ associe $g(1+\Delta\tau) - g(1) = 2\,\Delta\tau$ est la différentielle de f au point $t = 1$.

Nous allons à présent tenter de répondre avec « astuce » à la fameuse angoisse exposée en haut de la page précédente…

Quelle est la forme de df, la différentielle de f ?

f est définie sur $\mathbb{R}^2$, donc dépend de <u>deux</u> variables (usuellement x et y). On veut explorer comment f varie autour d'un point M(x,y). Dans ce but, on introduit <u>deux</u> variables h_1 et h_2 (classiquement) qui représentent des écarts par rapport à x et à y respectivement.
On « regarde » ainsi ce qui se passe au point M'($x + h_1$, $y + h_2$) voisin de M.

Comme f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^3$, sa différentielle calculée au point M(x,y) sera aussi dans $\mathbb{R}^3$ pour donner ses variations sur ces trois dimensions.

Au final, comme df représente le côté linéaire des variations de f, on aura une forme du type suivant : $df = \begin{pmatrix} a\,h_1 + b\,h_2 \\ c\,h_1 + d\,h_2 \\ e\,h_1 + k\,h_2 \end{pmatrix}$ avec des constantes a, b, …, e, k qui restent à exprimer.

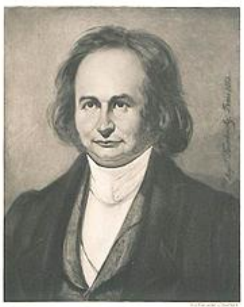
En supposant que l'on nous donne f de la forme $f = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \\ R(x,y) \end{pmatrix}$, il est normal de relier les constantes a et b aux dérivées partielles de P puisque l'on parle de *variations* ! De même pour c et d liées à Q au niveau de la deuxième ligne, et pareil pour R en dernière ligne.

Bref, on retrouve avec astuce la formule : $df(\,h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}\,h_1 + \frac{\partial P}{\partial y}\,h_2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}\,h_1 + \frac{\partial Q}{\partial y}\,h_2 \\ \frac{\partial R}{\partial x}\,h_1 + \frac{\partial R}{\partial y}\,h_2 \end{pmatrix}$

avec toutes les dérivées partielles calculées au point M(x,y).

On peut aussi écrire cette expression avec un produit matriciel selon :

$$df(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = J_f \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$



C. G. J. Jacobi.

J_f étant la fameuse matrice de Jacobi !

En espérant que la technique soit plus claire pour vous, nous remercions au passage le mathématicien allemand Charles Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) pour ses travaux sur les équations aux dérivées partielles…