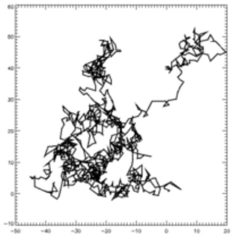
Les hasards du mouvement…



L'image de droite ne représente pas une molécule d'ADN dépliée…
Il s'agit de la simulation du déplacement dans l'eau, d'une petite particule soumise aux chocs successifs des molécules d'eau qui l'entourent.

Ce mouvement désordonné (nommé mouvement brownien) a été observé pour la première fois par le botaniste Robert Brown en 1827 (une prouesse à cette époque !). Il observait l'intérieur de petits grains de pollen.

Nous allons étudier un *petit* modèle de déplacements aléatoires pour montrer la possibilité d'aborder ce phénomène de manière mathématique. Ce travail est donc un prétexte pour réviser le dernier cours…

On considère une particule pouvant se déplacer de manière aléatoire sur trois positions A, B et C. On note $P_A(t)$ la probabilité de trouver la particule au point A à l'instant t.
De même, $P_B(t)$ et $P_C(t)$ donnent les probabilités de présence en B et C à t.

A B C

Discutons de l'évolution de $P_A(t)$.
La variation $dP_A(t)$ de $P_A(t)$ est liée au fait de trouver la particule en A, en B ou C à l'instant t. En supposant qu'à un instant donné, la particule doit forcément bouger avec une probabilité ½ d'aller à gauche ou à droite (lorsque cela est possible…), on peut écrire la relation : $dP_A(t) = -P_A(t)\,dt + \frac{1}{2} P_B(t)\,dt$ (sous-entendu : elle ne peut pas « sauter » de C à A).
Elle se comprend de la manière suivante : pendant le temps infinitésimal dt, la probabilité de trouver la particule en A est *diminuée* de la probabilité d'être déjà en A et d'en partir (avec une probabilité égale à 1 de partir vers B lorsqu'elle est déjà en A !) et *augmentée* de la probabilité d'être en B et d'aller vers A (avec une probabilité ½ de choisir d'aller vers A).

1) Donnez de la même manière les expressions des variations $dP_B(t)$ et $dP_C(t)$.

2) En déduire le système différentiel vérifié par les fonctions $P_A(t)$, $P_B(t)$ et $P_C(t)$.

3) On peut alors écrire ce système selon : $P' = M\,P$ avec $P = \begin{pmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

Diagonalisez la matrice M.

4) En déduire l'expression des fonctions $P_A(t)$, $P_B(t)$ et $P_C(t)$ en prenant les conditions initiales suivantes : $P_A(0) = 0$, $P_B(0) = 1$ et $P_C(0) = 0$ (la particule est en B à $t = 0$).
Donnez les limites de ces fonctions lorsque le temps t tend vers la fin de notre univers…

5) Conclusion : notre simulation semble-t-elle plausible ? (répondez ici sans calcul).
Validation : déterminez $P_A(t)$, $P_B(t)$ et $P_C(t)$ lorsque $P_A(0) = 1$, $P_B(0) = 0$ et $P_C(0) = 0$.
Déterminez ensuite les limites à l'infini de $P_A(t)$, $P_B(t)$ et $P_C(t)$.