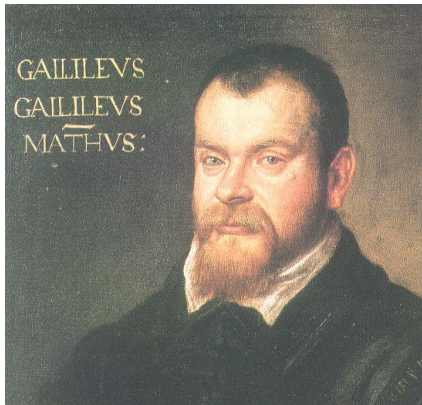




Fonctions $f(x, y)$

I Introduction

En physique, les fonctions représentent un outil de base indispensable pour l'étude de nombreux phénomènes.

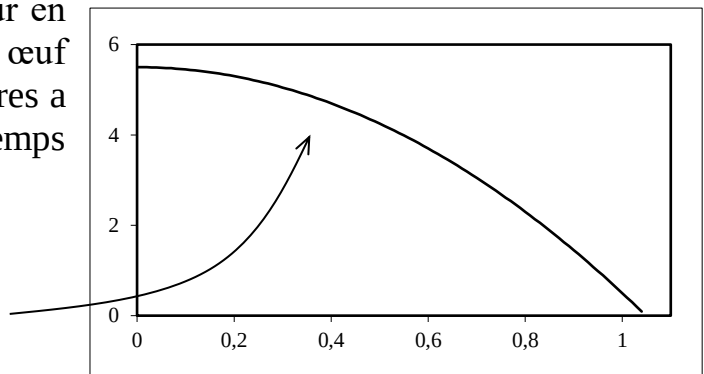
Exemple célèbre : la chute.

Si vous lâchez un corps soumis uniquement à son propre poids, il va tomber au sol...

On peut calculer l'évolution de sa hauteur en fonction du temps. Par exemple, un œuf tombant d'une hauteur initiale de 5,5 mètres a une altitude h qui varie en fonction du temps selon :

$$h(t) = 5,5 - \frac{1}{2} g t^2$$

On peut facilement tracer cette fonction



On peut aussi faire de savants calculs : pour quelle valeur du temps t l'œuf sera-t-il à une altitude de 1,73 m (le sommet de la tête d'un individu passant par là...).

Pour le savoir, il suffit de résoudre une équation du second degré : $1,73 = 5,5 - \frac{1}{2} g t^2$

On trouve $t = 0,88$ s (avec $g = 9,81$ m/s²)

Mais, les phénomènes physiques ne sont pas tous aussi simples ! C'est peu de le dire comme vous pourrez le constater plus tard...

En général, une grandeur physique dépend de plusieurs autres grandeurs.

Exemple : la résistance d'un fil dépend de la résistivité du métal, de la longueur du fil et de sa section selon : $R = \frac{\rho l}{S}$

On peut aussi écrire en fonction de son diamètre : $R = \frac{4 \rho l}{\pi D^2}$

La résistance est donc une *fonction* de ρ , de l et de D . On note : $R = f(\rho, l, D)$

En mathématiques, on parle alors de **fonctions de plusieurs variables**. En dehors d'un contexte particulier, les variables seront notées x , y et z . Peu importe ce que représentent ces variables, ce que l'on veut, c'est étudier la fonction.

Exemple : $f(x, y) = 2xy + x^2$ (Dans ce document on reste avec $f(x, y)$. Ouf...)

Comment décrire et étudier ce genre de fonctions (rencontrées très souvent par la suite...) ?

1) Domaine de définition

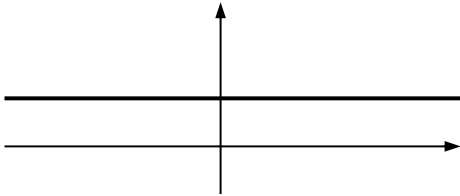
Soit $f(x, y) = \frac{x+1}{y-1}$ $\longrightarrow$ il est bien entendu interdit de calculer $f(x, 1)$!

En effet, le dénominateur devenant nul lorsque $y = 1$, la division par 0 serait délicate.

On note D_f le domaine de définition de la fonction f .

D_f = l'ensemble des points de coordonnées $(x ; y)$ où l'on peut calculer $f(x, y)$

Comme on travaille ici avec deux variables x et y , on représente D_f dans le plan.



Attention, ce graphique ne représente pas la fonction f !

D_f = plan privé de la droite d'équation $y = 1$

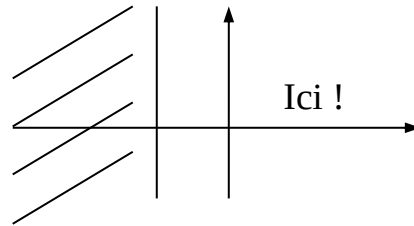
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 1\}$$

on note $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour y
pour x

Exemple : $f(x, y) = \sqrt{x+2} - y$

il faut ici avoir : $x + 2 \geq 0$ soit $x \geq -2$

Ainsi le domaine de définition est :
 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq -2\}$



Exercice I :

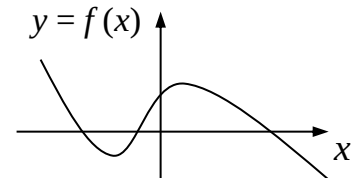
Déterminez puis représentez clairement le domaine de définition de la fonction définie par :

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y+3}}{x^2 - 3x + 1}$$

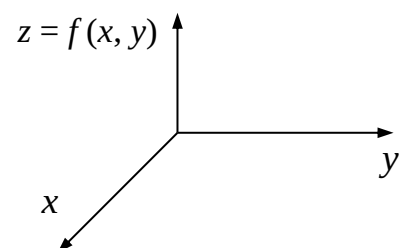
(certains exercices sont corrigés en fin de document...)

2) Représentation graphique

Avec une fonction $f(x)$, on pose $y = f(x)$ et on représente la courbe représentative de f dans un repère en deux dimensions. Classique.



Mais si la fonction étudiée est de la forme $f(x, y)$, on doit travailler en trois dimensions en posant $z = f(x, y)$.

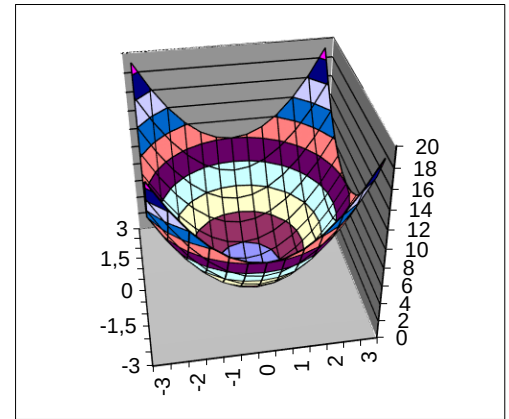


La représentation de f devient alors une surface qui se développe dans l'espace 3D.

Exemple : $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$

La surface obtenue est une espèce de cuvette... dont les bords sont des paraboles. Le fond correspond au point de coordonnées $(x ; y) = (0 ; 0)$

Remarque : dès que la fonction a plus de deux variables, toute représentation est exclue !
(sauf pour les esprits très supérieurs...)



Remarque sur les surfaces

On peut définir une surface en donnant une fonction $f(x, y)$ et en posant la relation $z = f(x, y)$. Alors, le point $M(x, y, z)$ appartient à la surface définie si ses coordonnées vérifient l'équation : $f(x, y) - z = 0$

Exemple : un plan avec $3x + y - z = 0$ dans ce cas $f(x, y) = 3x + y$
un paraboloïde avec $x^2 + y^2 - z = 0$ et dans ce cas $f(x, y) = x^2 + y^2$

Dans ce cas, la surface est nécessairement « ouverte » car pour tout couple $(x ; y)$ donné dans D_f on calcule une unique valeur de z .

II Dérivation

Passe-temps des mathématiciens : dériver des fonctions... (ça nous occupe en hiver...)

1) Dérivée d'ordre 1

Pour dériver une fonction du type $f(x, y)$, il faut dériver par rapport à une variable identifiée par le symbole de *dérivation partielle* : $\frac{\partial f}{\partial x}$ (dérivée de f par rapport à x)

Pour effectuer le calcul, on utilise les règles usuelles de dérivation des fonctions en gardant à l'esprit que *les autres variables sont considérées comme des constantes*.

Il faut être vigilant... Cette technique doit être maîtrisée (on la retrouvera en permanence...).

Rappel : règles usuelles de dérivation pour les fonctions d'une seule variable.

Soit $u(x)$ une fonction de la variable x . On a le tableau :

fonction f	u^n	e^u	$\sin(u)$	$\cos(u)$	$\ln(u)$
dérivée f'	$n u' u^{n-1}$	$u' e^u$	$u' \cos(u)$	$-u' \sin(u)$	$\frac{u'}{u}$

De plus, avec $u(x)$ et $v(x)$:

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

Exemple simple : $f(x, y, z) = 5x^2 + xy^3 - yz$

$$\text{On obtient : } \frac{\partial f}{\partial x} = 10x + y^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 - z \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -y$$

Remarque :

$$\text{Si } f(x, y) = u(x, y) v(x, y) \text{ alors } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x}$$

(même technique que pour : $(u v)' = u' v + u v'$)

Exemple pour une fonction plus compliquée : $f(x, y) = e^{x+y^2} + \sin(x^3 - y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial(e^{x+y^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\sin(x^3 - y))}{\partial x} = \frac{\partial(x + y^2)}{\partial x} e^{x+y^2} + \frac{\partial(x^3 - y)}{\partial x} \cos(x^3 - y) \\ &= e^{x+y^2} + 3x^2 \cos(x^3 - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial(e^{x+y^2})}{\partial y} + \frac{\partial(\sin(x^3 - y))}{\partial y} = \frac{\partial(x + y^2)}{\partial y} e^{x+y^2} + \frac{\partial(x^3 - y)}{\partial y} \cos(x^3 - y) \\ &= 2ye^{x+y^2} - \cos(x^3 - y) \end{aligned}$$

Exercice II :

Calculez les dérivées partielles par rapport à x et à y pour :

$$f(x, y) = 2xy + (x + y)e^y \quad ; \quad g(x, y) = e^{x^2 + y^3} + xy^2 \quad ; \quad h(x, y) = (5x^2 + y + 3)e^{xy}$$

2) Dérivée d'ordre 2

Pour étudier une fonction, on pourra être amené à calculer la dérivée de la dérivée...

$$\text{Si l'on pose : } f(x, y) = x^2 y^3 \text{ on a facilement : } \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$$

- On peut alors calculer la dérivée par rapport à x de $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy^3) = 2y^3$$

Cette dernière dérivée est appelée dérivée d'ordre 2 par rapport à x (on a dérivé deux fois par rapport à x)

On note cette dérivée : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

dérivée d'ordre 2

on dérive 2 fois par rapport à x

4

- On peut aussi dériver $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à la variable y :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy^3) = 2x \cdot 3y^2 = 6xy^2$$

On note cette dérivée $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ dérivée par rapport à x , puis par rapport à y
(l'ordre de dérivation se lit de droite à gauche)

Exercice III :

a) Calculez : $\frac{\partial f}{\partial x}$ puis $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pour la fonction : $f(x, y) = x^2 e^{xy}$

b) Calculez $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pour $f(x, y) = (5x^2 + y + 3) e^{xy}$

3) Théorème de Schwarz

Théorème

Soit une fonction $f(x, y)$ « simple » (sans vous expliquer ce que cela signifie...)

On a l'égalité suivante : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$

Moralité : les dérivées successives d'une fonction peuvent se faire dans l'ordre que l'on

veut (très cool !!) exemple : $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$

« Vérifiez le théorème de Schwarz pour la fonction f » se limitera à calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ puis $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pour voir si elles sont identiques. Cela peut être utile pour détecter une petite erreur.

Exercice IV :

« Vérifiez le théorème de Schwarz » pour : $g(x, y) = e^{(x^2 + y^3)}$; $f(x, y) = \ln(x^2 + y^3 + 1)$

5) Différentielle d'une fonction

Rappel (?)

L'étude des fonctions ayant une tête un peu compliquée du genre $f(x) = \frac{\sin(x)}{e^{3x}-1}$ est parfois

délicate. Par exemple, en cherchant la limite de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0, on constate que le haut tend vers 0 et le bas aussi !

Donc, on ne sait pas déterminer le résultat facilement...

Le développement limité est l'outil permettant d'obtenir le résultat. Cette technique permet d'écrire f sous la forme d'une fraction de polynômes (si !). On peut alors plus facilement travailler...

Le développement limité d'une fonction f en $x_0 = a$ s'écrit :

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + (x-a)^3 \frac{f'''(a)}{3!} + \dots$$

Par exemple, pour x proche de 0, on peut écrire : $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \dots$

Vérifions (avec x en radian) : $\sin(0,1) = 0,0998334\dots$

Et pour $x = 0,1$ la valeur de $x - \frac{1}{6}x^3$ est : $0,0998333\dots$ pas mal !

De même, pour t proche de 0 : $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots$

Ainsi : $f(x) = \frac{\sin(x)}{e^{3x}-1} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \dots}{3x + \frac{1}{2}(3x)^2 + \dots}$ d'où une limite égale à $1/3$

Fin du rappel (ou du cours...)

Dans le développement limité de f , on peut poser $h = x - a$ qui représente l'écart entre x et la valeur a , et on peut noter $f'(a) = \alpha$; $f''(a) = \beta$

Alors, on peut écrire : $f(a+h) = f(a) + \alpha h + \beta \frac{h^2}{2} + \dots$

$h \longrightarrow f(a) + \alpha h$ est une fonction qui dépend de h .

C'est l'approximation affine de la fonction f . On peut dire aussi que f est schématisée localement en a comme étant une portion de droite (un bout de sa tangente !).

Avec une « loupe », on peut centrer notre attention sur le terme αh pour définir une fonction linéaire : $h \longrightarrow \alpha h$

Cette fonction est notée df . C'est la *différentielle* de la fonction f .

Elle représente la variation linéaire de f , la part la plus importante de sa variation en a .

- Pour une fonction $f(x, y)$?

Une fonction f est différentiable en (x_0, y_0) si l'on peut écrire une relation du genre :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \alpha_1 (x - x_0) + \alpha_2 (y - y_0) + \dots$$

Notons les écarts : $h_1 = (x - x_0)$ et $h_2 = (y - y_0)$

termes encore plus petits

Localement, f est assimilée à un plan.

Sa partie linéaire, sa différentielle, est alors :

$$df: (h_1; h_2) \longrightarrow \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$$

6) Calcul de df

Nous admettons que dans la plupart des cas, on peut écrire pour $f(x, y)$:

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) h_2 + \dots$$

Ainsi, la différentielle de f en (x_0, y_0) est :

$$df: (h_1; h_2) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) h_2$$

Remarque

h_1 et h_2 sont de petites quantités car on « regarde » f au voisinage du point (x_0, y_0)

En physique, on note souvent : $h_1 = dx$ et $h_2 = dy$

$$\text{Ainsi : } \underline{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy} \quad \text{différentielle de } f$$

Traduction :

df représente une approximation de la variation globale de f .

On compte la variation selon x et la variation selon y .

$$\begin{array}{ccc} & \searrow & \searrow \\ & \frac{\partial f}{\partial x} dx & \frac{\partial f}{\partial y} dy \end{array}$$

C'est une *approximation* car on ne tient compte que des termes linéaires.

Application

Soit la formule célèbre de l'aire d'un rectangle : $S = L l$

Posons $f(L, l) = L l$ On obtient : $df = \frac{\partial f}{\partial L} dL + \frac{\partial f}{\partial l} dl = l dL + L dl$

Pour $L = 5 \text{ m}$ et $l = 2 \text{ m}$ on obtient : $S = 10 \text{ m}^2$

Si L gagne 13 cm : $dL = +0,13 \text{ m}$ et si l perd 6 cm : $dl = -0,06 \text{ m}$

alors, on obtient : $dS = l dL + L dl = 2 \times 0,13 + 5 \times (-0,06) = -0,04 \text{ m}^2$

Ce qui donne une nouvelle surface : $S' = S + dS = 10 - 0,04 = 9,96 \text{ m}^2$

Le calcul exact donne : $S' = (5 + 0,13) \cdot (2 - 0,06) = 9,9522 \text{ m}^2$

Remarque

En physique, pour mesurer S , on prend en compte les erreurs de mesure (incertitudes) sur L et sur l : ΔL et Δl

Alors, l'incertitude ΔS sur la mesure de S est majorée par (sera inférieure à) :

$$\Delta S = \left| \frac{\partial S}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial S}{\partial l} \right| \Delta l$$

Exercice V :

Le volume d'un cylindre est donné par : $V = \pi R^2 H$

Vous donnerez vos résultats à 10^{-3} près.

- 1) Calculez V avec $R = 1,2 \text{ m}$ et $H = 3 \text{ m}$.
- 2) Soit la fonction $f(x, y) = \pi x^2 y$. Déterminez la différentielle df de f .
- 3) En utilisant ce résultat, calculez le volume d'un cylindre dont le rayon est plus petit de 5 cm et dont la hauteur est plus grande de 10 cm.
- 4) Déterminez la valeur exacte du volume du cylindre précédent. Conclure.

Solution de quelques exercices...

I Il faut avoir : $y + 3 \geq 0$ et aussi $x^2 - 3x + 1 \neq 0$

D'où : $y \geq -3$ avec : $\Delta = 5$, on obtient : $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Donc, les conditions sont : $y \geq -3$; $x \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $x \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

II Solution très détaillée pour comprendre (non exigée lors d'un devoir...)

$$* \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (2xy)}{\partial x} + \frac{\partial ((x+y)e^y)}{\partial x} = 2y \frac{\partial (x)}{\partial x} + \frac{\partial (x+y)}{\partial x} e^y = 2y + e^y$$

De même : $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + e^y + (x+y)e^y$

$$* \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial (x^2+y^3)}{\partial x} e^{x^2+y^3} + y^2 \frac{\partial (x)}{\partial x} = 2x e^{x^2+y^3} + y^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial (x^2+y^3)}{\partial y} e^{x^2+y^3} + x \frac{\partial (y^2)}{\partial y} = 3y^2 e^{x^2+y^3} + 2xy$$

III $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (x^2)}{\partial x} e^{xy} + x^2 \frac{\partial (e^{xy})}{\partial x} = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy}$ (forme $(uv)' = u'v + u v'$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2x x e^{xy} + x^2 (e^{xy} + y x e^{xy}) = x^2 e^{xy} (3 + xy)$$

IV $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x e^{x^2+y^3}$ (forme $(e^u)' = u' e^u$) puis : $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 2x \times 3y^2 e^{x^2+y^3}$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 e^{x^2+y^3} \quad \text{puis : } \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 3y^2 \times 2x e^{x^2+y^3}$$

V 1) $V = \pi R^2 H = 13,572 \text{ m}^3$

2) $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 2\pi xy dx + \pi x^2 dy$

3) avec $dx = -0,05 \text{ m}$ et $dy = +0,10 \text{ m}$

$$V \text{ devient } V + df = 13,572 + [2\pi \times 1,2 \times 3 \times (-0,05) + \pi \times 1,2^2 \times 0,1] \\ = 13,572 - 0,679 = 12,893 \text{ m}^3$$

4) avec $R = 1,2 - 0,05 = 1,15 \text{ m}$ et $H = 3 + 0,1 = 3,1 \text{ m}$

on a un volume « exact » $= \pi \times 1,15^2 \times 3,1 = 12,880 \text{ m}^3$.

Donc, on a une différence de $0,013 \text{ m}^3$ entre la valeur $V + df$ et ce V « exact ».

Finalement, cela donne un écart relatif (en %) égal à : $\frac{0,013}{12,880} \times 100 = 0,1 \% !$

L'approximation linéaire était très bonne...