

Complément graphique sur les suites récurrentes

L'étude d'une suite récurrente peut être menée de manière algébrique, mais parfois, un petit coup de pouce sous forme de schéma peut être appréciable ! On étudie ici cet aspect visuel en travaillant sur un exemple classique.

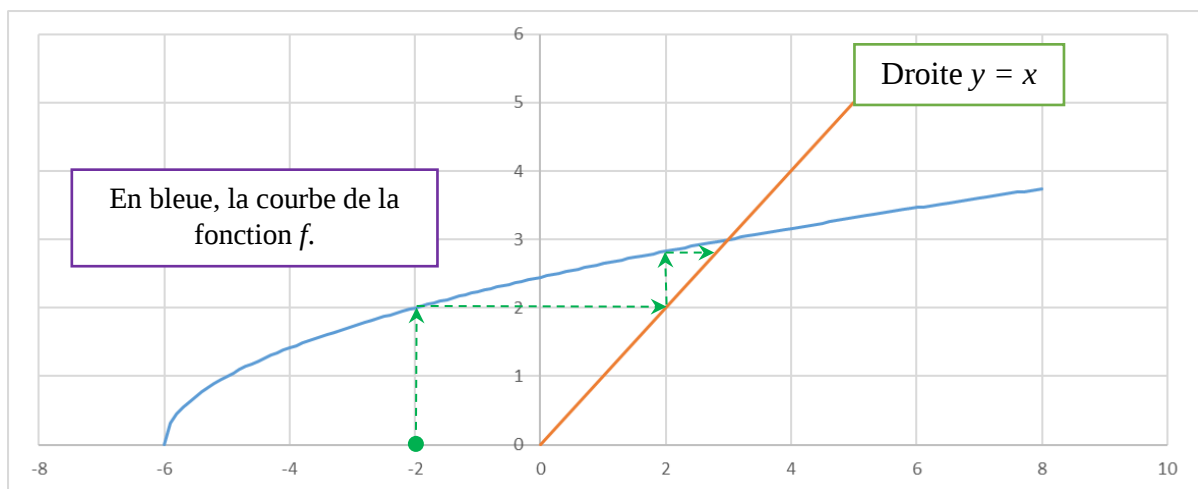
Soit la suite définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ et par son premier terme $u_0 = -2$.

On peut écrire, en utilisant la fonction f définie par $x \mapsto \sqrt{x + 6}$, que : $u_{n+1} = f(u_n)$.

D'où l'idée de tracer C_f , la courbe représentative de f , pour « calculer » graphiquement les termes de notre suite. Ainsi, on peut avoir une idée de son comportement.

Comment procéder ? Il faut d'abord tracer en plus la droite d'équation $y = x$.

Ensuite, on part de u_0 et on suit la ligne verte !



Commentaires pour tout comprendre :

- Partant de $u_0 = -2$ sur l'axe des abscisses, on monte vers C_f pour obtenir u_1 .
- On rejoint horizontalement la droite rouge pour faire apparaître $u_1 = 2$.
- Puis on recommence le même procédé : on monte vers la courbe....

Au final, on voit que cette suite est croissante et va converger vers le point de rencontre de la courbe C_f et de la droite rouge. On nomme ce point un point « fixe » car il vérifie la relation : $f(x) = x$. C'est d'ailleurs en résolvant cette équation que l'on obtiendra la ou les limite(s) possible(s) pour notre suite.

Si jusqu'ici, tout va bien, tant mieux, mais je vais vous perturber un peu très bientôt !!!

Conclusion temporaire d'un jeune (encore en formation sur ce thème) :

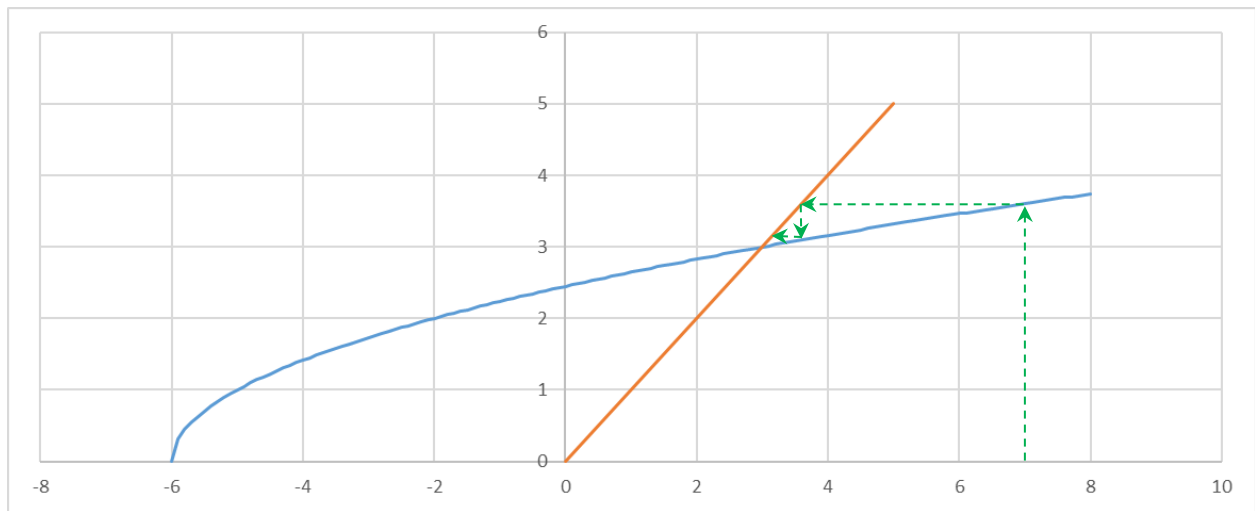
« Finalement, tout est limpide ! On a une suite définie par récurrence selon $u_{n+1} = f(u_n)$ avec une fonction f croissante. On obtient donc au final une suite croissante ! Logique !! ».

ATTENTION !

L'exemple ci-dessous montre que cette façon de penser est fausse...

On considère la même formule de départ, mais cette fois, on prend $u_0 = 7$.

On obtient alors la ligne verte suivante :



Conclusion pour cette ligne verte : la suite est clairement décroissante !

Moralité de cette affaire :

Une suite définie par récurrence selon $u_{n+1} = f(u_n)$ avec une fonction f croissante aura un sens de variation qui doit être étudié avec soin. La croissance de f n'implique pas la croissance de (u_n) .

Dernière info :

Si la suite est déclarée convergente, avec une justification du genre « (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente », on peut légitimement déterminer sa (ses) limite(s) possible(s) en résolvant l'équation classique $f(\ell) = \ell$.

Pour notre exemple, on obtient : $\sqrt{\ell + 6} = \ell$ où ℓ est nécessairement positive.

On peut alors « mettre au carré » et avoir ensuite : $\ell^2 - \ell - 6 = 0$.

On obtient finalement $\ell = 3$ ou $\ell = -2$. Seule la solution $\ell = 3$ a un sens pour notre cas.

En espérant que ce site vous apporte pleine satisfaction, je vous dis « A bientôt !! »