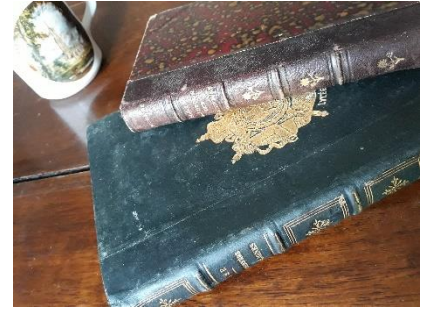


Cher Monsieur Riemann...



En feuilletant de vieux bouquins... entre deux pages, je tombe sur une vieille lettre du célèbre Bernhard Riemann (1826-1866) ! Si, je vous le jure sur la tête de Pythagore !

Ce tout jeune et admirable mathématicien écrivait à George Green (1793-1841) peu avant sa mort pour lui présenter des idées d'exercices à propos du théorème que nous connaissons

aujourd'hui sous le nom de Green-Riemann : $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ (*)

Je vous propose les détails de ce courrier....

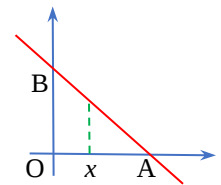
I Vérifions (*) dans le cas : $\vec{F} \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ x + y^2 \end{pmatrix}$ et $D =$ intérieur d'un triangle OAB

On donne ici A(1 ; 0) et B(0 ; 1) et on note classiquement $\vec{F} \begin{pmatrix} P(x, y) = x^2 - 2xy \\ Q(x, y) = x + y^2 \end{pmatrix}$.

1) Calculons d'abord l'intégrale double.

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -2x$ On doit donc calculer $\iint_D 1 + 2x dx dy$

Le schéma du domaine montre clairement $0 \leq x \leq 1$.



Ensuite, en fixant x , on remarque : $0 \leq y \leq 1 - x$ (équation de (AB)).

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \iint_D 1 + 2x dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 + 2x dy dx = \int_0^1 [(1 + 2x)y]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 (1 + 2x)(1 - x) dx = \int_0^1 -2x^2 + x + 1 dx = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

2) Calculons à présent le travail du champ le long du contour de D

On va décomposer le chemin de O à A, puis de A à B et enfin, de B vers O. En effet, la relation de Chasles permet : $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^O \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$

a) De O à A, on observe : x varie de 0 à 1 ; y reste constant avec $y = 0$. Donc $dy = 0$.

$$\text{Ainsi : } \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ x + y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix} = x^2 dx$$

$$\text{Donc : } \int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

b) De A vers B, on est contraint par la relation : $y = 1 - x$

Cette relation affine donne : $dy = -dx$. Par ailleurs, x varie de 1 à 0.

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ x + y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2x(1-x) \\ x + (1-x)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ -dx \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x^2 - 2x \\ x^2 - x + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ -dx \end{pmatrix} = (2x^2 - x - 1) dx\end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_1^0 (2x^2 - x - 1) dx = \frac{5}{6}$$

c) De B vers O. On observe : y varie de 1 à 0 ; x reste constant avec $x = 0$. Donc $dx = 0$.

$$\text{Ainsi : } \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ x + y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ dy \end{pmatrix} = y^2 dy$$

$$\text{Donc : } \int_B^O \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_1^0 y^2 dy = -\frac{1}{3}$$

Au final : $\oint_\gamma \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \frac{5}{6}$. L'égalité de la relation (*) est bien vérifiée dans notre cas !

II Vérifions (*) dans le cas : $\vec{F} \begin{pmatrix} xy \\ \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix}$ et $D =$ disque de rayon 1 centré en O.

1) Calculons d'abord l'intégrale double (Ah, l'astuce du « Copier-Coller » !!)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = x \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = x \quad \text{On doit donc calculer } \iint_D (x - x) dx dy = 0 \quad (\text{facile...})$$

2) Calculons à présent le travail du champ le long du contour de D

Si l'on remarque avec astuce que ce champ est conservatif (car $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$), il suffit de dire que le contour est une ligne fermée ce qui donne un travail nul.

Si vous avez de la buée sur vos lunettes (pour cause de masque...), vous posez le calcul avec la paramétrisation classique le long du cercle trigonométrique.

$$x(t) = \cos(t) \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{avec } t \text{ variant de } 0 \text{ à } 2\pi.$$

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \sin(t) \\ \frac{1}{2} \cos^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} -\cos(t) \sin^2(t) + \frac{1}{2} \cos^3(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2(t) + \frac{1}{2} \cos^2(t) \right) (\cos(t)) dt \quad \text{avec } \cos(t) \text{ la dérivée de } \sin(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2(t) + \frac{1}{2}(1 - \sin^2(t)) \right) (\cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{3}{2}\sin^2(t) + \frac{1}{2} \right) (\cos(t)) dt = \left[-\frac{1}{2}\sin^3(t) + \frac{1}{2}\sin(t) \right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

Encore une fois, la relation (*) est bien validée.

Dans la suite de la lettre, Riemann expose une idée concernant une autre relation, dont le nom de « Théorème de Stokes » est resté pour l'histoire. George Gabriel Stokes (1819-1903) est par ailleurs intimement lié aux fameuses équations de Navier-Stokes, indispensables au domaine de la mécanique des fluides.

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (**) \quad \text{où } S \text{ est une surface s'appuyant sur } \gamma$$

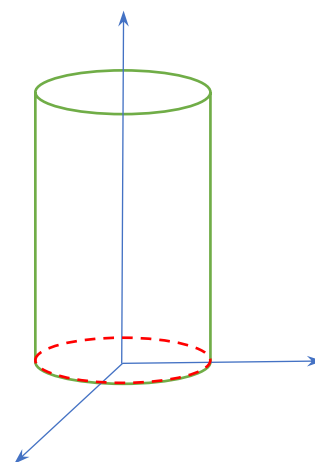
III Un exemple d'utilisation du théorème de Stokes

On considère ici le champ défini selon $\vec{V} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ h(x, y, z) \end{pmatrix}$ avec h une fonction de classe C^1 .

On considère le chemin γ défini par le cercle de centre O et de rayon R (en rouge à droite).

On utilise enfin la surface S prenant appui sur γ définie par $S_1 \cup S_2$ où S_1 est la surface latérale du cylindre d'axe (Oz), de rayon R avec z allant de 0 à h , et S_2 est la surface haute de ce cylindre.

Notons bien que la surface inférieure (où $z = 0$) de ce cylindre n'est pas utilisée car dans le théorème de Stokes, la surface S prenant appui sur le contour γ est une surface ouverte.



* **Première étape :** $\oint_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$

Pour le travail du champ le long du contour γ , on utilise la paramétrisation classique suivante : $x(t) = R \cos(t)$; $y(t) = R \sin(t)$; t allant de 0 à 2π pour le sens trigonométrique.

$$\text{On a : } \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ h(x, y, z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

En remplaçant x et y par les expressions ci-dessus, on obtient :

$$\oint_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} R (\cos t - \sin t)(-R \sin t) + R (\cos t + \sin t) (R \cos t) dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2$$

* **Deuxième étape** : $\iint_S \overrightarrow{rot} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS}$

Pour le calcul de $\iint_S \overrightarrow{rot} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS}$, on décomposera sur S_1 puis S_2 .

Il faut dans un premier temps calculer $\overrightarrow{rot} \vec{V}$ en coordonnées cartésiennes dans le repère usuel $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On obtient facilement : $\overrightarrow{rot} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y} \\ -\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} \\ 2 \end{pmatrix}$

Sur S_2 , le vecteur $\overrightarrow{dS}$ vaut $dS \vec{k}$ car la normale extérieure est $\vec{k}$. Ainsi : $\overrightarrow{rot} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS} = 2 dS$

Alors : $\iint_{S_2} \overrightarrow{rot} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S_2} 2 dS = 2 \iint_{S_2} dS = 2 S_2 = 2\pi R^2$.

Sur S_1 , la surface latérale du cylindre, le vecteur normal à la surface est le fameux vecteur $\vec{e}_r$ des coordonnées cylindriques. $\vec{e}_r = \frac{1}{R}(x \vec{i} + y \vec{j})$ en tout point $M(x, y, z)$ de la surface latérale (de rayon R !). Donc : $\overrightarrow{dS} = dS \vec{e}_r$

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{rot} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y} \\ -\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} dS = \frac{1}{R} \left(x \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y} - y \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} \right) dS$$

$$\text{Pour finir : } \iint_{S_1} \overrightarrow{rot} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S_1} \frac{1}{R} \left(x \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y} - y \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} \right) dS$$

Vous voyez le problème qui arrive ?

Les coordonnées cartésiennes ne sont absolument pas adaptées au calcul demandé sur une surface de cylindre ! Il est fort délicat d'exprimer le dS en cartésien.....

Fort heureusement, le théorème de Stokes nous donne la solution !

$$\oint_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi R^2 \text{ du côté gauche de la relation de Stokes.}$$

$$\iint_S \overrightarrow{rot} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S_1} \overrightarrow{rot} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS} + \iint_{S_2} \overrightarrow{rot} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S_1} \overrightarrow{rot} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS} + 2\pi R^2 \text{ du côté droit.}$$

$$\text{Par comparaison, on obtient : } \iint_{S_1} \overrightarrow{rot} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S_1} \frac{1}{R} \left(x \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y} - y \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} \right) dS = 0$$

(Merci M. Stokes !!)

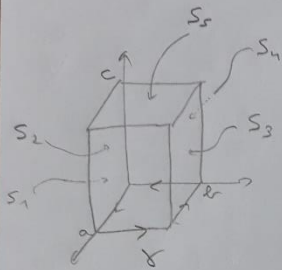
Remarque : le calcul peut être mené en utilisant les coordonnées cylindriques dès le départ. Il faut alors utiliser l'expression du rotationnel en cylindrique, écrire le champ dans ces mêmes coordonnées puis tout est plus simple ! (ou presque... je vous passe les détails de ce calcul très intéressant)

Voilà, c'était la teneur de cette lettre de M. Green fort passionnante... qui nous a éclairé sur la vie intérieure de Messieurs Green, Riemann et Stokes !!

Pour finir, vous pourriez fort bien « vérifier » le théorème de Stokes pour notre champ $\vec{V}$ mais en considérant cette fois un contour rectangulaire dans le plan $z = 0$. Disons avec x allant de 0 à a et avec y allant de 0 à b .

On peut alors construire la surface S comme sur la photo de mon corrigé (qui comporte trois pages au final). Bon courage à tous, cela vaut la peine d'essayer.....

①



$\vec{V} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ h(x,y,z) \end{pmatrix}$

STOKES

$$\oint_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

Calculons d'abord ici

$\text{rot } \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} \\ -\frac{\partial h}{\partial x} \\ z \end{pmatrix}$

• Sur S_1 : $\begin{cases} y=0 & \vec{n} = -\vec{e}_y \\ dS = dx dy \end{cases} \quad \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial h}{\partial x} dx dy$

$\iint_{S_1} \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \frac{\partial h}{\partial x} dx dy = \int_0^c \int_0^a \frac{\partial h}{\partial x} dx dy$

$= \int_0^c [h(x, 0, z)]_0^a dy$

$= \int_0^c h(a, 0, z) - h(0, 0, z) dy$

• Sur S_3 : $\begin{cases} y=b & \vec{n} = \vec{e}_y \\ dS = dx dy \end{cases} \quad \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial h}{\partial x} dx dy$

$\iint_{S_3} \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_3} -\frac{\partial h}{\partial x} dx dy = \int_0^c \int_0^a -\frac{\partial h}{\partial x} dx dy$

$= \int_0^c [-h(x, b, z)]_0^a dy$

$= \int_0^c -h(a, b, z) + h(0, b, z) dy$