Quelques calculs avec le nombre d'or

Vous savez peut-être que le nombre d'or est le nombre : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ce nombre est utilisé dans de nombreux domaines car il représente une proportion agréable à l'œil… Pour preuve, le joli rectangle ci-dessus dont la longueur est environ 1,6 fois plus grande que sa largeur.
Par ailleurs, il existe certaines relations étonnantes avec ce nombre φ.
Par exemple, avec votre calculatrice, calculez : $\dfrac{1}{\varphi}$ puis $\varphi - 1$. Etonnant non ?

Nous allons ici découvrir une autre surprenante propriété de ce nombre en complétant le tableau ci-dessous (donnez les résultats sans arrondir !).

$\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} =$ ……………………… $= 1 \times \varphi + 0$	
$\varphi^2 =$ …………………..	$\varphi + 1 =$ …………………..
$\varphi^3 =$ …………………..	$2\,\varphi + 1 =$ …………………
$\varphi^4 =$ ……………………	$3\,\varphi + 2 =$ …………………..
$\varphi^5 =$ ……………………	$5\,\varphi + 3 =$ ……………………
$\varphi^6 =$ ……………………	$8\,\varphi + 5 =$ ……………………
$\varphi^7 =$ ……………………	$13\,\varphi + 8 =$ …………………

Pour finir, on peut ajouter, du point de vue historique, que Leonardo Fibonacci (XVIIème siècle) avait proposé de « jouer » avec une suite de nombres construits selon la technique suivante :
On part de 0 et 1 puis, on additionne ces deux nombres pour obtenir 1. Ensuite, on additionne les deux derniers nombres pour former les suivants…
Complétez vous-même la suite :

0	1	1	2	3					

Que remarquez-vous ??? Complétez alors la dernière ligne du grand tableau !

Bonus pour les experts : démontrez une des deux premières relations…